DIOS CREÓ *los* NÚMEROS

LOS DESCUBRIMIENTOS MATEMÁTICOS QUE CAMBIARON LA HISTORIA

STEPHEN HAWKING

Primera edición: octubre de 2006
Segunda impresión: octubre de 2006
Tercera impresión: febrero de 2007
Cuarta impresión: abril de 2007
Quinta impresión: mayo de 2008
Sexta impresión: julio de 2009

Título original:
GOD CREATED THE INTEGERS:
The Mathematical Breakthroughs that Changed History

Los títulos originales de los ensayos que conforman este volumen se hallarán en la «Nota sobre esta edición». La traducción castellana de las distintas secciones «Vida y obra» ha corrido a cargo de Ubaldo Iriso Ariz. Los datos sobre el resto de traducciones se registran también en la mencionada «Nota».

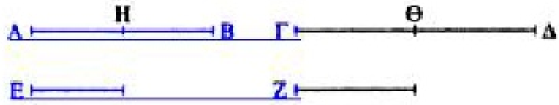
Diseño de la cubierta: Bill Jones
Realización: Átona, SL

ISBN: 978-84-8432-753-0
Depósito legal: B. 27.728-2009
2009 - Impreso y encuadernado en España por EGEDSA

PROPOSICIÓN 1

Si hay un número cualquiera de magnitudes respectivamente equimúltiplos de cualesquiera otras magnitudes iguales en número, cuantas veces una sea múltiplo de otra, tantas veces lo serán todas de todas.

Sean un número cualquiera de magnitudes AB, ΓΔ respectivamente equimúltiplos de cualesquiera otras magnitudes E, Z iguales en número.



Digo que, cuantas veces AB sea múltiplo de E, tantas veces lo serán también AB, ΓΔ de E, Z.

---

poderosa tentación para los mejores comentadores del libro V. Tanto es así que un criterio tradicional de la calidad de una versión o un comentario de los *Elementos* ha sido justamente el grado de comprensión y de penetración mostrado con respecto a esta teoría. Simson, por ejemplo, en su cuidada edición de 1756, se considera obligado a explicitar o añadir cuatro axiomas a las definiciones euclídeas: «I) Las cantidades equimultíplices de una misma cantidad, o de cantidades iguales, son entre sí iguales; II) Las cantidades, de las cuales una misma cantidad es equimultíplice o cuyas equimultíplices son iguales, son también iguales entre sí; III) La multíplice de una cantidad mayor es mayor que la equimultíplice de una menor; IV) La cantidad, cuya multíplice es mayor que la equimultíplice de otra, es mayor que ésta» (R. SIMSON, ed. española, Madrid, 1774, págs. 144-145 —*vid.* el listado de la «Introducción general» a EUCLIDES, *Elementos* I-IV (núm. 155 de la B.C.G.), VI, núm. 16—. Sobre la reconstrucción hoy establecida de su núcleo conceptual y deductivo pueden verse I. MUELLER, *Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid's Elements*, Cambridge (Mass.)-Londres, 1981, 3, §§ 3.1-3.2, págs. 134-148; L. VEGA, *La trama de la demostración*, Madrid, 1990, 4, § 4.2, págs. 329-330).

La teoría tiene, en fin, la trascendencia histórica que le han deparado las circunstancias de su recepción y transmisión, en particular a través de las versiones arábigo-latinas de la Edad Media. No estará de más recordar que la depuración de algunas interpolaciones y confusiones debidas a esta tradición y difundidas por la influyente edición de Campano —por ejemplo, una definición espuria y abstrusa de «proporción continua»—, así como la explicitación progresiva de los supuestos operativos en la teoría, marcaron el desarrollo de la crítica textual de los *Elementos* antes de la —digamos— «revolución filológica» del s. XIX; las ediciones de Comandino (1572, 1575) o de Simson (1756) son brillantes muestras. Cuenta, además, con el interés añadido de haber contribuido a una incipiente matematización de la filosofía natural a través de, por ejemplo, Bradwardine (en la primera mitad del s. XIII) y Oresme (en la segunda mitad del s. XIV). E incluso, de creer a Lipschitz y a Dedekind (amén de algunos historiadores de nuestro tiempo), no habría sido ajena a la moderna fundamentación de los números reales mediante la reducción de un número irracional a una «cortadura» en el conjunto ordenado de los números racionales, en la medida en que esta «cortadura» equivaldría a la que una razón entre magnitudes inconmensurables pudiera suponer en el contexto de la definición V, 5: bastaría (según dicen esos historiadores) asociar a una relación a/b irracional una partición en dos clases de números racionales m/n, los que son tales que $mb > ma$ y los que son tales que $mb < ma$. Pero esta adaptación de la definición euclídea, aun siendo algebraicamente viable, no dejaría de ser un trasplante demasiado forzado en un marco tan alejado de los *Elementos* como los problemas de fundamentación y reducción de la teoría matemática del s. XIX.

Por lo demás, la teoría del libro V no necesita galas ajenas para brillar con luz propia en el contexto de los *Elementos*. Y bien se puede terminar esta desmesurada nota con lo que dice Simson como remate de sus anotaciones al libro V: «...concluida ya la enmienda del libro V, por fin de él asiento gustosísimo a la opinión de Cl. Barrow: es a saber "que nada hay en toda la Obra de los *Elementos* inventado con mayor sutileza, establecido con más solidez, ni tratado con más exactitud que la doctrina de las proporcionales"» (R. SIMSON, *op. cit.*, pág. 322).

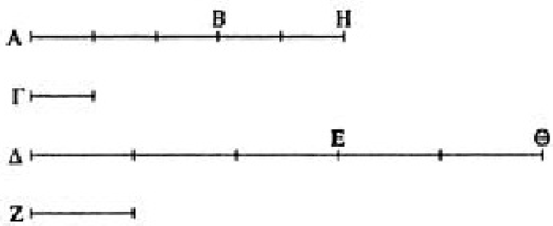
Pues dado que AB es equimúltiplo de E y ΓΔ de Z, entonces, cuantas magnitudes iguales a E hay en AB, tantas hay también en ΓΔ iguales a Z. Divídase AB en las magnitudes AH, HB iguales a E y ΓΔ en las (magnitudes) ΓΘ, ΘΔ iguales a Z; entonces el número de las (magnitudes) AH, HB será igual al número de las (magnitudes) ΓΘ, ΘΔ. Ahora bien, como AH es igual a E y ΓΘ a Z, entonces AH es igual a E y AH, ΓΘ a E, Z. Por lo mismo, HB es igual a E y HB, ΘΔ a E, Z; por tanto, cuantas (magnitudes) hay en AB iguales E, tantas hay también en AB, ΓΔ iguales a E, Z; luego cuantas veces sea AB múltiplo de E, tantas veces lo serán también AB, ΓΔ de E, Z.

Por consiguiente, si hay un número cualquiera de magnitudes respectivamente equimúltiplos de cualesquiera otras magnitudes iguales en número, cuantas veces una sea múltiplo de otra, tantas veces lo serán también todas de todas. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 2

Si una primera (magnitud) es el mismo múltiplo de una segunda que una tercera de una cuarta, y una quinta es también el mismo múltiplo de la segunda que una sexta de la cuarta, la suma de la primera y la quinta será el mismo múltiplo de la segunda que la suma de la tercera y la sexta de la cuarta.

Pues sea la primera (magnitud), AB, el mismo múltiplo de la segunda, Γ, que la tercera, ΔE, de la cuarta, Z, y sea la quinta, BH, el mismo múltiplo de la segunda, Γ, que la sexta, EΘ, de la cuarta, Z.



Digo que la suma de la primera y la quinta, AH, es el mismo múltiplo de la segunda, Γ, que la (suma de) la tercera y la sexta, ΔΘ, de la cuarta, Z.

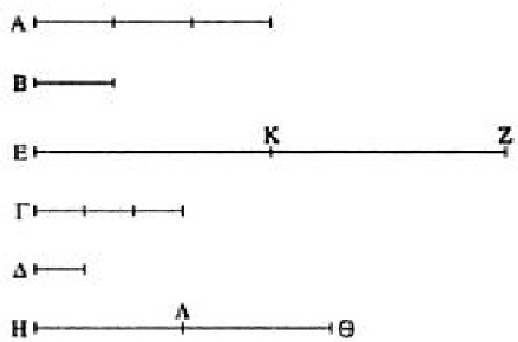
Pues, dado que AB es el mismo múltiplo de Γ que ΔE de Z, entonces, cuantas (magnitudes) hay en AB iguales a Γ, tantas hay también en ΔE iguales a Z. Y, por lo mismo, cuantas (magnitudes) hay en BH iguales a Γ, tantas hay también en EΘ iguales a Z; así pues, cuantas (magnitudes) hay en la (magnitud) entera AH iguales a Γ, tantas hay también en la (magnitud) entera ΔΘ iguales a Z; por tanto, cuantas veces AH es múltiplo de Γ, tantas veces lo será ΔΘ de Z. Luego la suma de la primera y la quinta, AH, será también el mismo múltiplo de la segunda, Γ, que la (suma de) la tercera y la sexta, ΔΘ, de la cuarta, Z.

Por consiguiente, si una primera (magnitud) es el mismo múltiplo de una segunda que una tercera de una cuarta y una quinta es también el mismo múltiplo de la segunda que una sexta de la cuarta, la suma de la primera y la quinta será el mismo múltiplo de la segunda que la suma de la tercera y la sexta de la cuarta. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 3

Si una primera (magnitud) es el mismo múltiplo de una segunda que una tercera de una cuarta, y se toman equimúltiplos de la primera y la tercera, también por igualdad[42] *cada una de las dos (magnitudes) tomadas serán equimúltiplos, respectivamente, una de la segunda, y la otra de la cuarta.*

Pues sea la primera, A, el mismo múltiplo de la segunda, B, que la tercera, Γ, de la cuarta, Δ, y tómense los equimúltiplos EZ, HΘ de A, Γ.



Digo que Ez es el mismo múltiplo de B que HΘ de Δ.

Pues dado que EZ es el mismo múltiplo de A que EZ de Γ, entonces, cuantas (magnitudes) hay en EZ iguales a A, tantas hay también en HΘ iguales a Γ. Divídase EZ en las magnitudes EK, KZ iguales a A, y HΘ en las (magnitudes) HΛ, ΛΘ iguales a Γ. Entonces el número de las (magnitudes) EK, KZ será igual al número de las (magnitudes) HΛ, ΛΘ. Y puesto que A es el mismo múltiplo de B que Γ de Δ, mientras que EK es igual a A y HΛ a Γ, entonces EK es el mismo múltiplo de B que HΛ de Δ. Por lo mismo KZ es el mismo múltiplo de B que ΛΘ de Δ. Así pues, dado que la primera, EK, es el mismo múltiplo de la segunda, B, que la tercera, HΛ, de la cuarta, Δ, y la quinta, KZ, también es el mismo múltiplo de la segunda, B, que la sexta, ΛΘ, de la cuarta, Δ; entonces la suma de la primera y la quinta, EZ, es también el mismo múltiplo de la segunda, B, que la (suma de) la tercera y la sexta, HΘ, de la cuarta, Δ [V, 2].

Por consiguiente, si una primera magnitud es el mismo múltiplo de una segunda que una tercera de una cuarta, y se toman equimúltiplos de la primera y la tercera, también, por igualdad, cada una de las dos (magnitudes) tomadas serán equimúltiplos, respectivamente, una de la segunda y la otra de la cuarta. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 4

Si una primera (magnitud) guarda la misma razón con una segunda que una tercera con una cuarta, cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera guardarán la misma razón con cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta respectivamente, tomados en el orden correspondiente.

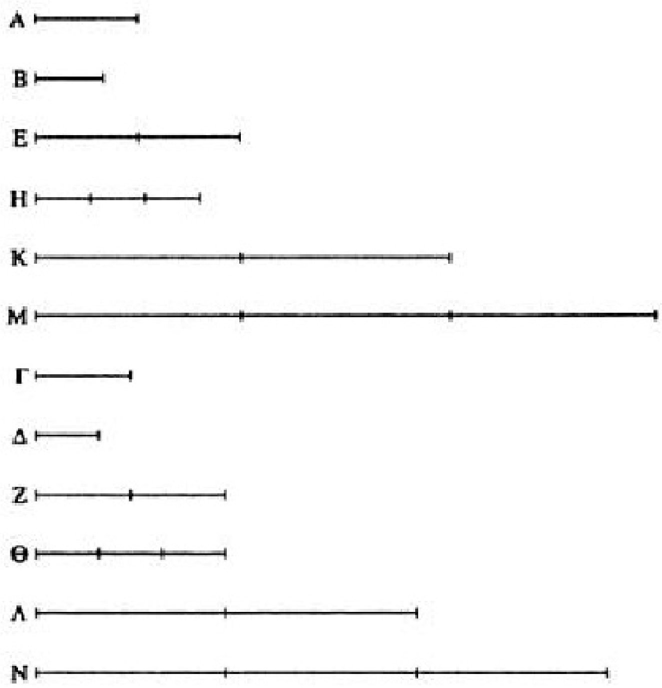
42. Como Heiberg señala, el uso de *di'ísou* no hace referencia aquí a la definición 17 de «razón por igualdad». Se trata, no obstante, de un uso suficientemente parejo como para justificar su empleo en este enunciado.

Pues guarde la primera (magnitud), A, la misma razón con la segunda, B, que la tercera, Γ, con la cuarta, Δ, y tómense los equimúltiplos E, Z de A, Γ, y otros equimúltiplos tomados al azar[43] H, Θ, de B, Δ.

Digo que como E es a H, así Z es a Θ.

Pues tómense los equimúltiplos K, Λ de E, Z, y otros equimúltiplos tomados al azar, M, N de H, Θ.

Dado que E es el mismo múltiplo de A que Z de Γ, y se han tomado los equimúltiplos K, Λ de E, Z, entonces K es el mismo múltiplo de A que Λ de Γ [V, 3]. Por lo mismo M es el mismo múltiplo de B que N de Δ. Ahora bien, puesto que A es a B como Γ a Δ, y se han tomado los equimúltiplos K, Λ de A, Γ y otros equimúltiplos tomados al azar M, N de B, Δ, entonces, si K excede a M, Λ también excede a N, y si es igual, es igual, y si



menor, menor [V, Def. 5]. Ahora bien, K, Λ son equimúltiplos de E, Z, y M, N otros equimúltiplos tomados al azar de H, Θ; por tanto como E es a H, así Z a Θ [V, Def. 5].

Por consiguiente, si una primera (magnitud) guarda la misma razón con una segunda que una tercera con una cuarta, cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera guardarán la misma razón con cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta respectivamente, tomados en el orden correspondiente. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 5

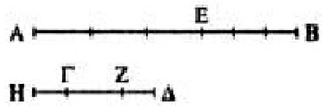
Si una magnitud es el mismo múltiplo de otra que una (magnitud) quitada (a la primera) lo es de otra quitada (a la segunda), la (magnitud) restante (de la primera) será tam-

43. La versión tradicional de *há étychen* por «cualesquiera» sería problemática en ciertos casos y encubriría el tono informal —desde el punto de vista lógico— del texto griego original. Por ello opto por la traducción «al azar».

bién el mismo múltiplo de la (magnitud) restante (de la segunda) que la (magnitud) entera de la (magnitud) entera.

Pues sea la magnitud AB el mismo múltiplo de la (magnitud) ΓΔ que la (magnitud) quitada AE de la (magnitud) quitada ΓZ.

Digo que la (magnitud) restante EB será también el mismo múltiplo de la (magnitud) restante ZΔ que la (magnitud) entera AB de la (magnitud) entera ΓΔ.



Así pues, cuantas veces sea AE múltiplo de ΓZ, tantas veces lo sea EB de ΓH.[44]

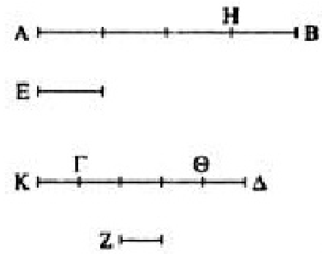
Y dado que AE es el mismo múltiplo de ΓZ que EB de HΓ, entonces AE es el mismo múltiplo de ΓZ que AB de HZ [V, 1]. Pero se ha asumido[45] que AE sea el mismo múltiplo de ΓZ que AB de ΓΔ. Por tanto, AB es el mismo múltiplo de cada una de las dos (magnitudes) HZ, ΓΔ; luego HZ es igual a ΓΔ. Quítese de ambas ΓZ; entonces la restante HΓ es igual a la restante ZΔ. Y puesto que ΔE es el mismo múltiplo de ΓZ que EB de HΓ, y HΓ es igual a ΔZ, entonces ΔE es el mismo múltiplo de ΓZ que EB de ZΔ. Pero se ha supuesto que AE es el mismo múltiplo de ΓZ que AB de ΓΔ; por tanto EB es el mismo múltiplo de ZΔ que AB de ΓΔ. Luego la restante (magnitud) EB también será el mismo múltiplo de ZΔ que la (magnitud) entera AB de la (magnitud) entera ΓΔ.

Por consiguiente, si una magnitud es el mismo múltiplo de otra que una (magnitud) quitada (a la primera) lo es de otra quitada (a la segunda), la (magnitud) restante (de la primera) será también el mismo múltiplo de la (magnitud) restante (de la segunda) que la (magnitud) entera de la (magnitud) entera. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 6

Si dos magnitudes son equimúltiplos de dos magnitudes y ciertas (magnitudes) quitadas (de ellas) son equimúltiplos de estas (dos segundas), las restantes también son o iguales a las mismas o equimúltiplos de ellas.

Pues sean dos magnitudes AB, ΓΔ equimúltiplos de dos magnitudes E, Z, y sean las (magnitudes) quitadas AH, ΓΘ equimúltiplos de las mismas E, Z.



Digo que las (magnitudes) restantes HB, ΘΔ también son iguales a E, Z o equimúltiplos de ellas.

Pues sea en primer lugar HB igual a E.

Digo que ΘΔ es también igual a Z.

Así pues, hágase ΓK igual a Z. Dado que AH es el mismo múltiplo de E que ΓΘ de Z, y que HB es igual a E y KΓ a Z, entonces AB es el mismo múltiplo de E que KΘ de Z [V, 2]. Pero se ha supuesto que AB es el mismo múltiplo de E que ΓΔ de Z; por tanto KΘ es el mismo múltiplo de Z que ΓΔ de Z. Así pues, dado que cada una de las (magnitudes) KΘ, ΓΔ es el mismo múltiplo de Z, entonces KΘ es igual a ΓΔ. Quí-

44. Esta manera de expresar la construcción podría dar a entender que ΓH es una magnitud dada, mientras que EB debe ser hallada de modo que sea igual a cierto múltiplo de ΓH. Sin embargo, EB es la que ha sido dada y ΓH la que hay que hallar. Es decir, que ΓH debe ser construida como un submúltiplo de EB.

45. *Keîtai* más literalmente: «se ha puesto».

tese de ambos ΓΘ; entonces la (magnitud) restante ΚΓ es igual a la (magnitud) restante ΘΔ. Pero Z es igual a ΚΓ; entonces ΘΔ también es igual a Z. De modo que si HB es igual a E, también ΘΔ será igual a Z.

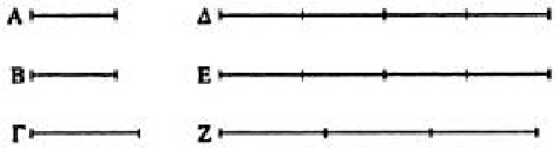
De manera semejante demostraríamos que, si HB es múltiplo de E, ΘΔ será también el mismo múltiplo de Z.[46]

Por consiguiente, si dos magnitudes son equimúltiplos de dos magnitudes, y ciertas (magnitudes) quitadas (de ellas) son equimúltiplos de estas (dos segundas), las restantes también son o iguales a las mismas o equimúltiplos de ellas. Q. E. D.[47]

PROPOSICIÓN 7

Las (magnitudes) iguales guardan la misma razón con una misma (magnitud) y la misma (magnitud) guarda la misma razón con las (magnitudes) iguales.

Sean A, B las magnitudes iguales y Γ otra, tomada al azar.



Digo que cada una de las (magnitudes) A, B guarda la misma razón con Γ y Γ con cada una de las (magnitudes) A, B.

Pues tómense los equimúltiplos Δ, E de A, B y otro equimúltiplo al azar, Z de Γ.[48]

Así pues, dado que Δ es el mismo múltiplo de A que E de B, y A es igual a B, entonces Δ es también igual a E. Pero Z es otra (magnitud) tomada al azar. Entonces, si Δ excede a Z, E también excede a Z, y si es igual es igual, y si es menor, menor. Ahora bien, Δ, E son equimúltiplos de A, B, y Z otro equimúltiplo, al azar, de Γ; entonces, como A es a Γ, así B es a Γ [V, Def. 5].

Digo que Γ guarda también la misma razón con cada una de las (magnitudes) A, B.

Pues, siguiendo la misma construcción, demostraríamos de manera semejante que Δ es igual a E; pero Z es alguna otra (magnitud), entonces, si Z excede a Δ, excede también a E, y si es igual, también es igual, y si es menor, menor. Ahora bien, Z es múltiplo de Γ, mientras que Δ, E son otros equimúltiplos, tomados al azar de A, B; por tanto, como Γ es a A, así Γ es a B [V, Def. 5].

46. Lit.: «si es múltiplo de... tantas veces lo será...».

47. R. Simson se cree obligado a añadir, tras esta proposición, cuatro proposiciones derivadas de la Def. V, 5, que obran tácitamente no sólo en algunas pruebas de este mismo libro, sino en otras aplicaciones de la teoría de la proporción en los *Elementos*. Son los teoremas siguientes. A: «Si la primera cantidad [i.e., magnitud] tiene a la segunda la misma razón que la tercera a la cuarta, será la tercera mayor, igual o menor que la cuarta según sea la primera mayor, igual o menor que la segunda». B: «Si cuatro cantidades fueren proporcionales, también inversamente serán proporcionales». C: «Si la primera cantidad fuese igual multíplice o la misma parte de la segunda que la tercera lo es de la cuarta, la primera será a la segunda como la tercera a la cuarta». D: «Si la primera cantidad fuese a la segunda como la tercera a la cuarta, y la primera fuese multíplice o parte de la segunda, la tercera será la misma multíplice o la misma parte de la cuarta» (SIMSON, ed. cit., págs. 121-123, y notas, págs. 312-314). Las razones de Simson para estas adiciones parecen más pendientes de los comentarios suscitados por la presentación de Euclides que de la teoría misma del libro V.

48. Se trata del mismo uso de *hò étychen* que en la proposición 4.

46. Se trata del mismo uso de no ejemplo que en la proposición 4.

Por consiguiente, las (magnitudes) iguales guardan la misma razón con una misma (magnitud) y la misma (magnitud) (guarda la misma razón) con las (magnitudes) iguales.

Porisma:

A partir de esto queda claro que, si algunas magnitudes son proporcionales, también son proporcionales por inversión [V, Def. 13]. Q. E. D.

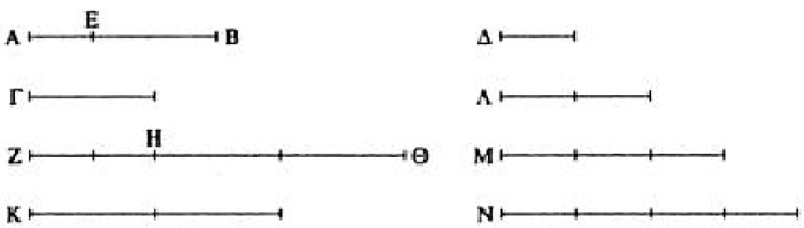
PROPOSICIÓN 8

De magnitudes desiguales, la mayor guarda con una misma (magnitud) una razón mayor que la menor, y la misma (magnitud) guarda con la menor una razón mayor que con la mayor.

Sean AB, Γ magnitudes desiguales, y sea la mayor AB, y otra, al azar, Δ.

Digo que AB guarda con Δ una razón mayor que Γ con Δ, y Δ guarda con Γ una razón mayor que con AB.

Pues como AB es mayor que Γ, hágase BE igual a Γ, entonces la menor de las (magnitudes) AE, EB, multiplicada, será alguna vez mayor que Δ [V, Def. 4]. En primer lugar, sea AE menor que EB, y multiplíquese AE, y sea su múltiplo ZH que es mayor que Δ, y, cuantas veces ZH es múltiplo de AE, tantas veces lo sea también HΘ de EB y K de Γ; tómese Λ doble de Δ y M triple (de Δ), y así sucesivamente[49] hasta que el múltiplo tomado de Δ sea el primero mayor que K. Tómese y sea N, el cuádruplo de Δ, el primero mayor que K.



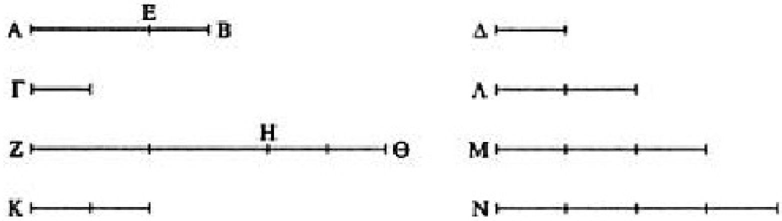
Así pues, dado que K es el primero menor que N, entonces K no es menor que M; y, dado que ZH es el mismo múltiplo de AE que HΘ de EB, entonces ZH es el mismo múltiplo de AE que ZΘ de AB [V, 1]. Ahora bien, ZH es el mismo múltiplo de AE que K de Γ; luego ZΘ es el mismo múltiplo de AB que K de Γ. Por tanto ZΘ, K son equimúltiplos de AB, Γ. Como HΘ es a su vez el mismo múltiplo de EB que K de Γ, y EB es igual a Γ, entonces HΘ es también igual a K; pero K no es menor que M; por tanto HE) tampoco es menor que M. Pero ZH es mayor que Δ; así pues, la (magnitud) entera ZΘ es mayor que Δ y M juntas.

Ahora bien, Δ y M juntas son iguales a N, puesto que M es efectivamente el triple de Δ, mientras que M y Δ juntas son el cuádruple de Δ, y N es también el cuádruple de Δ; por tanto M y Δ juntas son iguales a N. Pero ZΘ es mayor que M, Δ; luego ZΘ excede a N; mientras que K no excede a N. Y ZΘ, K son equimúltiplos de AB, Γ, mientras que N es otro (múltiplo), tomado al azar, de Δ; por consiguiente AB guarda una razón mayor con Δ que Γ con Δ [V, Def. 7].

49. *Kai hexès henì pleîon*, en el sentido de múltiplos sucesivamente incrementados de uno en uno.

Digo además que Δ guarda también una razón mayor con Γ que Δ con AB.

Pues siguiendo la misma construcción, demostraríamos de manera semejante que N excede a K, mientras que N no excede a ZΘ. Y N es múltiplo de Δ, mientras que ZΘ,



K son otros equimúltiplos tomados al azar de AB, Γ; por consiguiente Δ guarda con Γ una razón mayor que Δ con AB [V, Def. 7].

Sea ahora ΔE mayor que EB. Entonces la menor EB, multiplicada, será alguna vez mayor que Δ [V, Def. 4]. Multiplíquese y sea HΘ un múltiplo de EB, y mayor que Δ; y, cuantas veces HΘ es múltiplo de EB, tantas veces sea también ZH múltiplo de AE y K de Γ. De manera semejante demostraríamos que ZΘ, K son equimúltiplos de AB, Γ; tómese parejamente N como múltiplo de Δ y el primero mayor que ZH; de modo que de nuevo ZH no es menor que M, y HΘ es mayor que Δ; entonces la (magnitud) entera ZΘ excede a Δ, M, es decir a N. Pero K no excede a N, puesto que ZH que es mayor que HΘ, es decir que K tampoco excede a N. Y del mismo modo siguiendo los pasos de arriba completamos la demostración.

Por consiguiente, de las magnitudes desiguales, la mayor guarda con una misma (magnitud) una razón mayor que la menor; y la misma (magnitud) guarda con la menor una razón mayor que con la mayor. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 9

Las (magnitudes) que guardan con una misma (magnitud) la misma razón son iguales entre sí; y aquellas con las que una misma (magnitud) guarda la misma razón, son iguales.

Pues guarde cada una de las (magnitudes) A, B la misma razón con Γ.

Digo que A es igual a B.

Pues, si no, cada una de las (magnitudes) A, B no guardaría la misma razón con Γ [V, 8]; pero la guarda; luego A es igual a B.

Guarde a su vez Γ la misma razón con cada una de las (magnitudes) A, B.

Digo que A es igual a B.

Pues, si no, Γ no guardaría la misma razón con cada una de las (magnitudes) A, B [V, 8]; pero la guarda; luego A es igual a B.

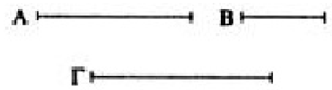
Por consiguiente, las (magnitudes) que guardan con una misma (magnitud) la misma razón son iguales entre sí; y aquellas con las que una misma (magnitud) guarda la misma razón, son iguales. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 10

De las (magnitudes) que guardan razón con una misma (magnitud), la que guarda una razón mayor, es mayor. Y aquella con la que la misma (magnitud) guarda una razón mayor, es menor.

Pues guarde A con Γ una razón mayor que B con Γ.

Digo que A es mayor que B.



Pues, si no, o A es igual a B o es menor. Ahora bien, A no es igual a B: pues (entonces) cada una de las (magnitudes) A, B guardaría la misma razón con Γ [V, 7]; pero no la guarda; luego A no es igual a B. Ahora bien, A tampoco es menor que B: pues (entonces) A guardaría con Γ una razón menor que B con Γ [V, 8]; pero no la guarda; luego A no es menor que B. Y se ha demostrado que tampoco es igual. Por tanto A es mayor que B.

Guarde a su vez Γ con B una razón mayor que Γ con A.

Digo que B es menor que A.

Pues, si no, o es igual o es mayor. Ahora bien, B no es igual a A: pues (entonces) Γ guardaría con cada una de las (magnitudes) A, B la misma razón [V, 7]; pero no la guarda; luego A no es igual a B. Ahora bien, tampoco B es mayor que A: pues (entonces) Γ guardaría una razón menor con B que con A [V, 8]; pero no la guarda; luego B no es mayor que A. Y se ha demostrado que tampoco es igual; por tanto B es menor que A.

Por consiguiente, de las (magnitudes) que guardan razón con una misma (magnitud), la que guarda una razón mayor, es mayor. Y aquella con la que la misma (magnitud) guarda mayor razón, es menor. Q. E. D.[50]

PROPOSICIÓN 11

Las razones que son iguales a una misma razón son también iguales entre sí.[51]

Pues, como A es a B sea así Γ a Δ, y, como Γ es a Δ así E a Z.

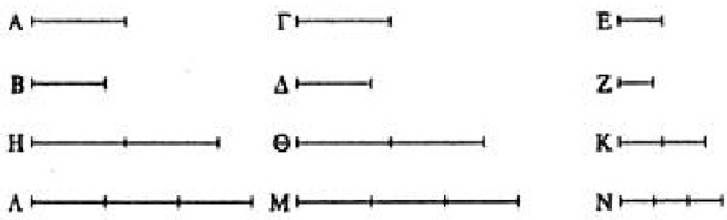
Digo que como A es a B así E es a Z.

Tómense los equimúltiplos H, Θ, K de A, Γ, E y otros equimúltiplos, tomados al azar, Λ, M, N de B, Δ, Z.

Y puesto que como A es a B, así Γ es a Δ, y se han tomado los equimúltiplos H, Θ de A, Γ, y otros equimúltiplos, tomados al azar, Λ, M de B, Δ, entonces, si H excede a Λ, también Θ excede a M, y si es igual, es igual, y si menor, menor.

50. En esta proposición introduce Euclides unas nociones de razón mayor o menor en un contexto en el que la referencia a la def. V, 7, puede ser insuficiente. Como se ha observado reiteradamente (desde SIMSON, 1756 —*vid.* ed. cit., notas, págs. 315-317—; cf. HEATH, ed. cit., II, págs. 156-157), no se deben aplicar de modo inmediato a las razones las condiciones estipuladas o supuestas para las magnitudes, en particular la condición de tricotomía o el corolario destacado por Simson: que una magnitud no puede ser a la vez mayor o menor que otra (Simson, ed. cit., pág. 316). El propio Euclides vendrá a probar en la proposición siguiente que las razones iguales a una misma razón son iguales entre sí, pese a disponer de la noción común 1 («las cosas iguales a una misma cosa son iguales entre sí»); en esta prop. V 11, Euclides, en vez de considerar una aplicación directa de esta noción común, desarrollará una prueba específica de la igualdad entre razones.

51. Por razones estilísticas traduzco *hoi autoí* por «iguales», pues en este caso son expresiones equivalentes. Sigo, por otra parte, al traductor anónimo de Simson.



Asimismo, puesto que E es a Z como Γ es a Δ, y se han tomado los equimúltiplos Θ, K de Γ, E y otros equimúltiplos, tomados al azar, M, N de Δ, Z, entonces, si Θ excede a M, también K excede a N, y si es igual, es igual, y si menor, menor. Pero si Θ excede a M, también H excede a Λ, y si es igual, es igual, y si menor, menor; de modo que, si H excede a Λ, K excede también a N, y si es igual, es igual, y si menor, menor. Ahora bien, H, K son equimúltiplos de A, E, y Λ, N otros equimúltiplos, tomados al azar, de B, Z; por tanto, como A es a B, así E a Z.

Por consiguiente, las razones que son iguales a una misma razón, también son iguales entre sí. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 12

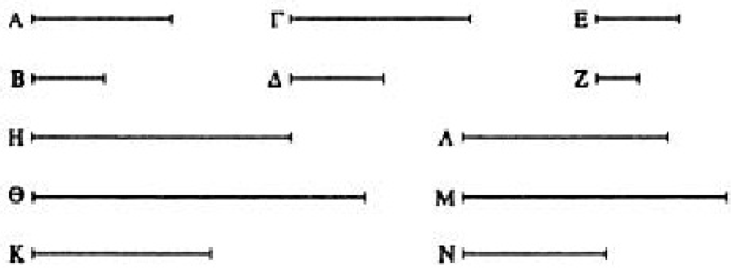
Si un número cualquiera de magnitudes fueren proporcionales, como sea una de las antecedentes a una de las consecuentes, así serán todas las antecedentes a las consecuentes.[52]

Sean A, B, Γ, Δ, E, Z un número cualquiera de magnitudes proporcionales, (de modo que) como A es a B, así son Γ a Δ y E a Z.

Digo que como A es a B, así serán A, Γ, E a B, Δ, Z.

Tómense pues los equimúltiplos H, Θ, K de A, Γ, E y otros equimúltiplos, tomados al azar, Λ, M, N de B, Δ, Z.

Ahora bien, puesto que Γ es a Δ y E a Z como A es a B; y se han tomado los equimúltiplos H, Θ, K de A, Γ, E; y otros equimúltiplos, tomados al azar, Λ, M, N de B, Δ, Z;



entonces, si H excede a Λ, también Θ a M y K a N, y si es igual, igual, y si menor, menor. De modo que, si H excede a Λ, también H, Θ, K (exceden) a Λ, M, N, y si es igual, (son) iguales, y si menor, menores. Tanto H como H, Θ, K son equimúltiplos de A y de A, Γ, E, pues, en efecto, si hay un número cualquiera de magnitudes respectivamente equimúltiplos de cualesquiera otras magnitudes iguales en número, cuantas

52. Expresión algebraica: si $a : a' :: b : b' :: c : c'$..., cada razón es igual a la razón $(a + b + c + ...) : (a' + b' + c' ...)$. Este teorema aparece en ARISTÓTELES, *Ética Nicomáquea* V 5 113 lb 14, en la forma abreviada: «El todo es al todo como cada parte es a cada parte».

todo es al todo como cada parte es a cada parte».

veces una de las magnitudes es múltiplo de otra, tantas veces lo serán también todas de todas [V, 1].

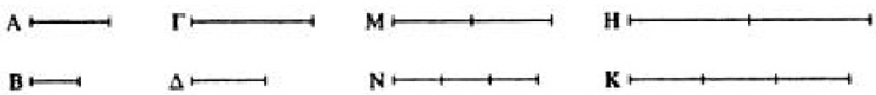
Por la misma razón, tanto Λ como Λ, M, N son equimúltiplos de B y de B, Δ, Z; luego, como A es a B, así A, Γ, E a B, Δ, Z [V, Def. 5].

Por consiguiente, si un número cualquiera de magnitudes fueren proporcionales, como sea una de las antecedentes a una de las consecuentes, así serán todas las antecedentes a las consecuentes. Q. E. D.

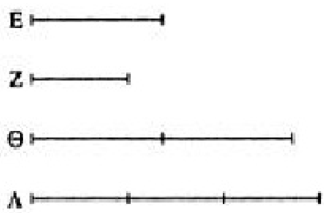
PROPOSICIÓN 13

Si una primera (magnitud) guarda con una segunda la misma razón que una tercera con una cuarta, y la tercera guarda con la cuarta una razón mayor que una quinta con una sexta, la primera guardará también con la segunda una razón mayor que la quinta con la sexta.

Guarde pues la primera, A, con la segunda, B, la misma razón que la tercera, Γ, con la cuarta, Δ; y guarde la tercera, Γ, con la cuarta, Δ, una razón mayor que la quinta, E, con la sexta, Z.



Digo que la primera, A, guardará también con la segunda, B, una razón mayor que la quinta, E, con la sexta, Z.



Pues como hay algunos equimúltiplos de Γ, E y otros equimúltiplos, tomados al azar, de Δ, Z, tales que el múltiplo de Γ excede al múltiplo de Δ pero el múltiplo de E no excede al múltiplo de Z [V, Def. 7], tómense y sean H, Θ equimúltiplos de Γ, E; y K, Λ otros equimúltiplos al azar de Δ, Z, de modo que H exceda a K pero Θ no exceda a Λ; y cuantas veces H sea múltiplo de Γ, tantas veces lo sea también M de A, y cuantas veces sea múltiplo K de Δ, tantas veces lo sea también N de B.

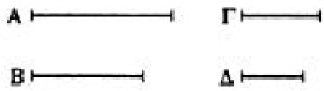
Y puesto que Γ es a Δ como A es a B, y se han tomado los equimúltiplos M, H de A, Γ y otros equimúltiplos, tomados al azar, N, K de B, Δ, entonces, si M excede a N, también H excede a K, y si es igual, es igual, y si menor, menor [V, Def. 5]. Pero H excede a K; luego M también excede a N. Ahora bien, Θ no excede a Λ; y M, Θ son equimúltiplos de A, E, mientras que N, Λ (son) otros equimúltiplos, tomados al azar, de B, Z; luego A guarda con B una razón mayor que E con Z [V, Def. 7].

Por consiguiente, si una primera (magnitud) guarda con una segunda la misma razón que una tercera con una cuarta, y la tercera guarda con la cuarta una razón mayor que una quinta con una sexta, la primera guardará también con la segunda una razón mayor que la quinta con la sexta. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 14

Si una primera (magnitud) guarda con una segunda la misma razón que una tercera con una cuarta y la primera es mayor que la tercera, la segunda será también mayor que la cuarta, y si es igual, será igual, y si menor, menor.

Guarde pues la primera, A, con la segunda, B, la misma razón que la tercera, Γ, con la cuarta, Δ, y sea A mayor que Γ.



Digo que también B es mayor que Δ.

Pues como A es mayor que Γ y B otra (magnitud), tomada al azar, entonces A guarda una mayor razón con B que Γ con B [V, 8]. Pero como A es a B, así Γ es a Δ; entonces Γ guarda también con Δ una razón mayor que Γ con B [V, 13]. Ahora bien, aquella con la que una misma magnitud guarda una razón mayor, es menor [V, 10]; así pues, Δ es menor que B; de modo que B es mayor que Δ.

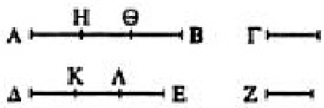
De manera semejante demostraríamos que si A es igual a Γ, B también será igual a Δ y si A es menor que Γ, B será también menor que Δ.

Por consiguiente, si una primera magnitud guarda con una segunda la misma razón que una tercera con una cuarta, y la primera es mayor que la tercera, la segunda será también mayor que la cuarta, y si es igual, igual, y si menor, menor. Q. E. D.[53]

PROPOSICIÓN 15

Las partes guardan la misma razón entre sí que sus mismos múltiplos,[54] tomados en el orden correspondiente.

Sea pues AB el mismo múltiplo de Γ que ΔE de Z.



Digo que como Γ es a Z, así AB a ΔE.

Pues dado que AB es el mismo múltiplo de Γ que ΔE de Z, entonces, cuantas magnitudes iguales a Γ hay en AB, otras tantas (habrá) iguales a Z en ΔE. Divídase AB en las (magnitudes) AH, HΘ, ΘB iguales a Γ, y ΔE en las (magnitudes) ΔK, KΛ, ΛE iguales a Z; entonces el número de las (magnitudes) AH, HΘ, ΘB será igual al número de las (magnitudes) ΔK, KΛ, ΛE. Y puesto que AH, HΘ, ΘB son iguales entre sí y ΔK, KΛ, ΛE son también iguales entre sí, entonces, como AH es a ΔK, así HΘ a KΛ, y ΘB a ΛE [V, 7]. Por tanto, como una de las antecedentes es a una de las consecuentes, así todas las antecedentes serán también a todas las consecuentes [V, 12]; entonces, como AH es a ΔK, así AB a ΔE. Ahora bien, AH es igual a Γ, y ΔK a Z; luego, como Γ es a Z, así AB a ΔE.

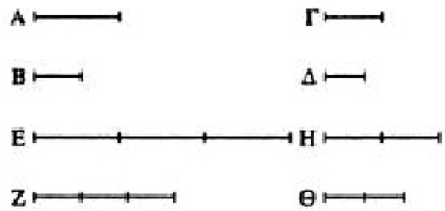
Por consiguiente, las partes guardan la misma razón entre sí que sus mismos múltiplos tomados en el orden correspondiente. Q. E. D.

53. Simson añade la prueba específica del segundo y tercer caso de esta proposición, a saber: si A es igual o menor que Γ. Cf. SIMSON, ed. cit., pág. 131.

54. En griego: *hosaútos pollaplasíois.*

PROPOSICIÓN 16

Si cuatro magnitudes son proporcionales, también por alternancia serán proporcionales.



Sean A, B, Γ, Δ, cuatro magnitudes proporcionales, (a saber) como A es a B, así Γ a Δ.

Digo que lo serán también por alternancia, (a saber) como A es a Γ así B a Δ.

Tómense los equimúltiplos E, Z de A, B y otros equimúltiplos, tomados al azar, H, Θ de Γ, Δ. Y puesto que E es el mismo múltiplo de A que Z de B, las partes guardan la misma razón que sus mismos múltiplos [V, 15]; entonces, como A es a B así E a Z. Pero como A es a B, así Γ a Δ; luego, como Γ es a Δ, así también E a Z [V, 11]. A su vez, puesto que H, Θ son equimúltiplos de Γ, Δ, entonces como Γ es a Δ, así H a Θ [V, 15]. Pero como Γ es a Δ así E a Z; luego como E es a Z, así también H a Θ [V, 11]. Ahora bien, si cuatro magnitudes son proporcionales, y la primera es mayor que la tercera, la segunda será también mayor que la cuarta, y si es igual, igual, y si es menor, menor [V 14]. Por tanto, si E excede a H, también Z excede a Θ, y si es igual, es igual, y si menor, menor. Ahora bien, E, Z son equimúltiplos de A, B, y H, Θ, otros (equimúltiplos), tomados al azar, de Γ, Δ; luego, como A es a Γ, así B a Δ [V, Def. 5].

Por consiguiente, si cuatro magnitudes son proporcionales, también por alternancia serán proporcionales. Q. E. D.

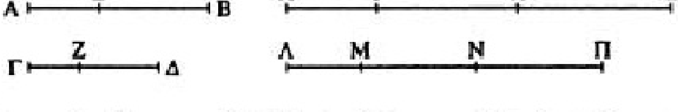
PROPOSICIÓN 17

Si unas magnitudes son proporcionales por composición, también por separación serán proporcionales.[55]

Sean AB, BE, ΓΔ, ΔZ magnitudes proporcionales por composición (de modo) que como AB es a BE, así ΓΔ es a ΔZ.

Digo que también por separación serán proporcionales, de modo que, como AE sea a EB, así ΓZ será a ΔZ.

Pues tómense los equimúltiplos HΘ, ΘK, ΛM, MN de AE, EB, ΓZ, ZΔ y otros equimúltiplos, tomados al azar, KΞ, NΠ de EB, ZΔ.



Y dado que HΘ es el mismo múltiplo de AE que ΘK de EB, entonces HΘ es el mismo múltiplo de AE que HK de AB [V, 1]. Pero HΘ es el mismo múltiplo de AE que ΛM

55. Expresión algebraica:

si $a : b :: c : d$, entonces $(a - b) : b :: (c - d) : d$

Euclides emplea aquí *synkeímenos lógos* «razón compuesta» en el sentido de *sýnthesis lógou* «composición de una razón», lo que demuestra que ambos términos no están claramente definidos en los *Elementos*.

de ΓZ; entonces HK es el mismo múltiplo de AB que ΛM de ΓZ. Como ΛM es a su vez el mismo múltiplo de ΓZ que MN de ZΔ, entonces ΛM es el mismo múltiplo de ΓZ que ΛN de ΓΔ [V, 1]. Pero ΛM era el mismo múltiplo de ΓZ que HK de AB; así pues HK es el mismo múltiplo de AB que ΛN de ΓΔ. Por tanto HK, ΛN son equimúltiplos de AB, ΛΔ. Como ΘK es a su vez el mismo múltiplo de EB que MN de ZΔ, y KΞ es también el mismo múltiplo de EB que NΠ de ZΔ, la suma ΘΞ es también el mismo múltiplo de EB que MΠ de ZΔ [V, 2]. Ahora bien, dado que, como AB es a BE, así ΓΔ es a ΔZ, y se han tomado los equimúltiplos HK, ΛN de AB, ΓΔ y los equimúltiplos ΘΞ, MΠ de EB, ZΔ, entonces, si HK excede a ΘΞ, ΛN excede también a MΠ, y si es igual, es igual, y si menor, menor. Exceda HK a ΘΞ; entonces, si se quita la (magnitud) común, ΘK, también HΘ excede a KΞ. Pero si HK excedía a ΘΞ, ΛN también excedía a MΠ; luego ΛN excede también a MΠ, y si se quita la (magnitud) común MN, ΛM también excede a NΠ; de modo que, si HΘ excede a KΞ, ΛM excede también a NΠ. De manera semejante demostraríamos que si HΘ es igual a KΞ, ΛM también será igual a NΠ, y si es menor, será menor. Ahora bien, HΘ, ΛM son equimúltiplos de ΔE, ΓZ, pero KΞ, NΠ son otros equimúltiplos tomados al azar de EB, ZΔ; por tanto, como AE es a EB, así ΓZ a ZΔ.

Por consiguiente, si unas magnitudes son proporcionales por composición, también por separación serán proporcionales. Q. E. D.

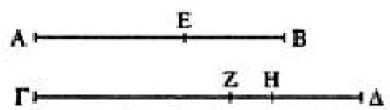
PROPOSICIÓN 18

Si unas magnitudes son proporcionales por separación, también por composición serán proporcionales.

Sean AE, EB, ΓZ, ZΔ magnitudes proporcionales por separación, (de modo que) como ΔE es a EB, así ΓZ es a ZΔ.

Digo que también por composición serán proporcionales, (de modo que) como AB (es) a BE, así ΓΔ (será) a ΔZ.

Porque si ΓΔ no es a ΔZ como AB a BE, entonces, como AB es a BE, así ΓΔ será a una (magnitud) menor que ΔZ o a una mayor.



Sea en primer lugar proporcional a la menor ΔH. Dado que como AB es a BE, así ΓΔ es a ΔH, son magnitudes proporcionales por composición; así pues también serán proporcionales por separación [V, 17]. Por tanto, como AE es a EB, así ΓH a HΔ. Pero también se ha supuesto que como AE es a EB, así ΓZ a ZΔ. Luego, como ΓH es a HΔ, así ΓZ a ZΔ [V, 11]. Pero la primera ΓH es mayor que la tercera ΓZ; entonces la segunda HΔ también es mayor que la cuarta ZΔ [V, 14]. Pero también menor; lo cual es imposible; por tanto no es el caso de que ΓΔ sea a una (magnitud) menor que ZΔ, como AB a BE. De manera semejante demostraríamos que tampoco es proporcional a una mayor; así pues será proporcional a la propia (ZΔ).

Por consiguiente, si unas magnitudes son proporcionales por separación, también por composición serán proporcionales. Q. E. D.[56]

56. La demostración supone la existencia de un cuarto término proporcional. Diversos editores y comentadores de los *Elementos*, al menos desde Clavio (1574, 2.ª ed. 1589), han optado por la declaración expresa de esa suposición a título de axioma. Otros han preferido la opción de una prueba independiente de dicho su-

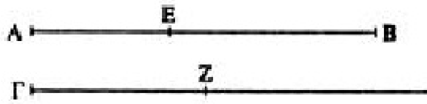
de esa suposición a título de axioma. Otros han preferido la opción de una prueba independiente de dicho su-

PROPOSICIÓN 19

Si como un todo es a otro todo, así es una (parte) quitada (de uno) a una (parte) quitada (de otro), la (parte) restante será también a la (parte) restante como el todo es al todo.

Pues como el todo AB es al todo ΓΔ, así sea la (parte) quitada AE a la (parte) quitada ΓZ.

Digo que la (parte) restante EB será también a la (parte) restante ZΔ como el todo AB es al todo ΓΔ.



Pues, dado que como AB es a ΓΔ, así AE es a ΓZ, también, por alternancia, como BA es a AE, así ΔΓ a ΓZ [V, 16]. Y puesto que son magnitudes proporcionales por composición, también por separación serán proporcionales [V, 17] (es decir) como BE es a EA, así ΔZ a ΓZ; y por alternancia, como BE es a ΔZ, así EA a ZΓ [V, 16]. Pero, como AE es a ΓZ, así se ha supuesto que el todo AB es al todo ΓΔ. Luego la (parte) restante EB será a la (parte) restante ZΔ como el todo AB es al todo ΓΔ [V, 11].

Por consiguiente, si como un todo es a otro todo, así es una (parte) quitada (de uno) a una (parte) quitada (del otro), la (parte) restante será también a la (parte) restante como el todo es al todo. Q. E. D.

[Y puesto que se ha demostrado, que como AB es a ΓΔ, así EB a ZΔ, también por alternancia, como AB es a BE, así ΓΔ a ZΔ, luego son magnitudes proporcionales por composición; pero se ha demostrado que como BA es a AE, así ΔΓ es a ΓZ; y esto es por conversión].[57]

Porisma:

A partir de esto queda claro que si unas magnitudes son proporcionales por composición, también por conversión serán proporcionales. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 20

Si hay tres magnitudes y otras iguales a ellas en número que, tomadas de dos en dos, guardan la misma razón, y si, por igualdad, la primera es mayor que la tercera, también la cuarta será mayor que la sexta; y si es igual, igual, y si es menor, menor.

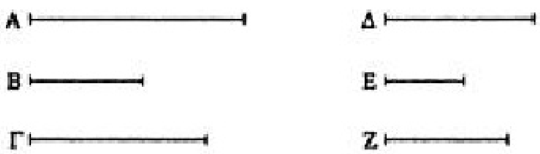
Sean A, B, Γ tres magnitudes y Δ, E, Z otras iguales a ellas en número que, tomadas de dos en dos, guarden la misma razón, (es decir que) como A es a B, así Δ es a E y como B es a Γ, así E a Z, y, por igualdad, sea mayor A que Γ.

Digo que Δ será también mayor que Z, y si es igual, igual, y si es menor, menor.

---

puesto o la opción de demostrar previamente la suposición misma (HEATH, ed. cit., II, págs. 170-174, ofrece diversas muestras). El propio Euclides demostrará más adelante, en la prop. VI 12, un caso particular en el que los términos proporcionales son líneas rectas. Por lo demás, una vez asumida la existencia de una «cuarta proporcional», se podría derivar ulteriormente su unicidad a través de las proposiciones V 11 y V 9.

57. Heiberg atetiza las líneas que se encuentran entre la conclusión y el porisma porque Euclides no acostumbra a explicar un porisma, ya que, por su propia naturaleza, un porisma no precisa explicación sino que es algo que se presenta, según Proclo, *apragmateútōs*, es decir, «sin esfuerzo».



Pues dado que A es mayor que Γ y B es otra (magnitud) cualquiera, la mayor guarda con una misma (magnitud) una razón mayor que la menor [V, 8], entonces A guarda con B una razón mayor que Γ con B. Pero como A es a B, así Δ es a E, y por inversión, como Γ es a B, así Z es a E; luego Δ también guarda con E una razón mayor que Z con E [V, 13]. Ahora bien, de las magnitudes que guardan razón con una misma (magnitud), la que guarda una razón mayor es mayor [V, 10]. Así pues Δ es mayor que Z. De manera semejante demostraríamos que, si A es igual a Γ, también Δ será igual a Z, y si es menor, menor.

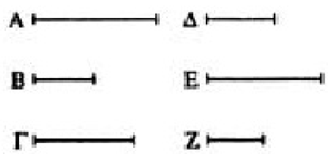
Por consiguiente, si hay tres magnitudes y otras iguales a ellas en número que, tomadas de dos en dos, guardan la misma razón, y si, por igualdad, la primera es mayor que la tercera, también la cuarta será mayor que la sexta; y si es igual, igual, y si es menor, menor. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 21

Si hay tres magnitudes y otras iguales a ellas en número que, tomadas de dos en dos, guardan la misma razón y su proporción es perturbada, y si, por igualdad, la primera es mayor que la tercera, también la cuarta será mayor que la sexta; y si es igual, igual; y si es menor, menor.

Sean A, B, Γ tres magnitudes y Δ, Z, E otras iguales a ellas en número que, tomadas de dos en dos, guarden la misma razón, y sea su proporción perturbada (es decir que) como A es a B, así E a Z, y como B es a Γ, así Δ a E, y, por igualdad, sea A mayor que Γ.

Digo que Δ también será mayor que Z, y si es igual, igual, y si es menor, menor.



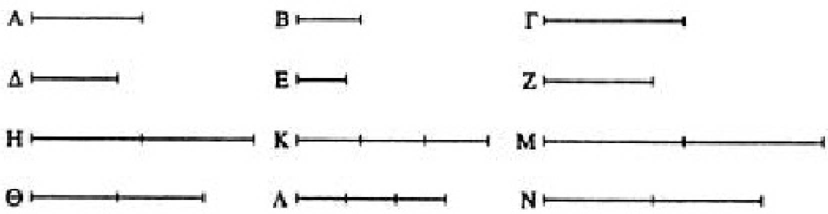
Pues como A es mayor que Γ, y B otra magnitud, entonces A guarda una razón mayor con B que Γ con B [V, 8]. Pero como A es a B, así E a Z, y por inversión, como Γ es a B, así E es a Δ. Por tanto E guarda una razón mayor con Z que E con Δ [V, 13]. Pero aquello con lo que una misma (magnitud) guarda una razón mayor es menor [V, 10], luego Z es menor que Δ, por tanto Δ es mayor que Z. De manera semejante demostraríamos que si A es igual a Γ, Δ será también igual a Z, y si menor, menor.

Por consiguiente, si hay tres magnitudes y otras iguales a ellas en número que, tomadas de dos en dos, guardan la misma razón, y su proporción es perturbada; y si, por igualdad la primera es mayor que la tercera, la cuarta será también mayor que la sexta; y si es igual, igual; y si es menor, menor. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 22

Si hay un número cualquiera de magnitudes y otras iguales a ellas en número que, tomadas de dos en dos, guardan la misma razón, por igualdad guardarán también la misma razón.

Sean A, B, Γ un número cualquiera de magnitudes y Δ, E, Z otras iguales a ellas en número que, tomadas de dos en dos, guarden la misma razón (es decir que) como Δ es a B, así Δ es a E, y como B es a Γ, así E es a Z.



Digo que por igualdad guardarán también la misma razón (*i. e.* que como A es a Γ, así Δ es a Z).

Pues tómense los equimúltiplos H, Θ de A, Δ y otros equimúltiplos tomados al azar K, Λ de B, E, y además otros equimúltiplos al azar M, N de Γ, Z.

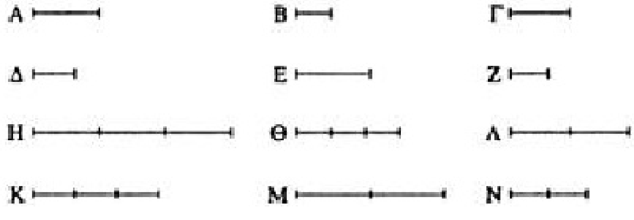
Y dado que como A es a B, así Δ es a E, y se han tomado los equimúltiplos H, Θ de A, Δ y otros equimúltiplos tomados al azar K, Λ de B, E, entonces como H es a K así Θ a Λ [V, 4]. Por lo mismo, como K es a M, así Λ es a N. Así pues, dado que H, K, M son tres magnitudes y Θ, Λ, N otras magnitudes iguales a ellas en número que, tomadas de dos en dos, guardan la misma razón, entonces, por igualdad, si H excede a M, Θ también excede a N; y si es igual, es igual; y si es menor, menor [V, 20]. Ahora bien, H, Θ son equimúltiplos de A, Δ, y M, N otros equimúltiplos tomados al azar de Γ, Z. Entonces como A es a Γ, así Δ es a Z [V, Def. 5].

Por consiguiente, si hay un número cualquiera de magnitudes y otras iguales a ellas en número que, tomadas de dos en dos, guardan la misma razón, por igualdad guardarán también la misma razón. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 23

Si hay tres magnitudes y otras iguales a ellas en número que, tomadas de dos en dos, guardan la misma razón, y su proporción es perturbada, por igualdad guardarán también la misma razón.

Pues sean A, B, Γ tres magnitudes y Δ, E, Z otras iguales a ellas en número que, tomadas de dos en dos, guarden la misma razón y sea su proporción perturbada, (es decir que) como A es a B, así E a Z y como B es a Γ, así Δ a E.



Digo que como A es a Γ, así Δ es a Z.

Pues tómense los equimúltiplos H, Θ, K de A, B, Δ y otros equimúltiplos tomados al azar Λ, M, N de Γ, E, Z.

Y dado que H, Θ son equimúltiplos de A, B y las partes guardan la misma razón que sus mismos múltiplos [V, 15],[58] entonces como A es a B, así H es a Θ. Por lo mismo, como E es a Z, así también M a N; ahora bien, como A es a B, así E a Z; entonces como H es a Θ, así M a N [V, 11]. Y dado que, como B es a Γ, así Δ a E, también, por alternancia, como B es a Δ, así Γ a E [V, 16]. Y puesto que Θ, K son equimúltiplos de B, Δ, y las partes guardan la misma razón que sus equimúltiplos, entonces como B es a Δ, así Θ a K [V, 15]. Ahora bien, como B es a Δ, así Γ a E; luego también como Θ es a K, así Γ a E [V, 11]. A su vez, dado que Λ, M son equimúltiplos de Γ, E, entonces, como Γ es a E, así Λ a M [V, 15]. Ahora bien, como Γ es a E, así Θ a K; luego también como Θ es a K, así Λ a M [V, 11]; y, por alternancia, como Θ es a Λ, así K es a M [V, 16]. Pero se ha demostrado también que como H es a Θ, así M a N.

Así pues, dado que H, Θ, Λ son tres magnitudes y K, M, N otras iguales a ellas en número que, tomadas de dos en dos, guardan la misma razón, y su proporción es perturbada, entonces, por igualdad, si H excede a Λ, K también excede a N; y si es igual, es igual; y si menor, menor [V, 21]. Pero H, K son equimúltiplos de A, Δ, y Λ, N de Γ, Z. Por tanto, como A es a Γ, así Δ es a Z.

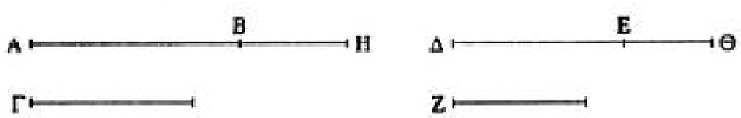
Por consiguiente, si hay tres magnitudes y otras iguales a ellas en número que, tomadas de dos en dos, guardan la misma razón, y su proporción es perturbada, por igualdad guardarán también la misma razón. Q. E. D.[59]

PROPOSICIÓN 24

Si una primera (magnitud) guarda con una segunda la misma razón que una tercera con una cuarta, y una quinta guarda con la segunda la misma razón que la sexta con la cuarta, la primera y la quinta, tomadas juntas, guardarán también la misma razón con la segunda que la tercera y la sexta con la cuarta.

Pues guarde una primera (magnitud) AB con una segunda Γ la misma razón que una tercera ΔE con una cuarta Z; y guarde una quinta BH con la segunda, Γ, la misma razón que la sexta, EΘ, con la cuarta Z.

Digo que, tomadas juntas, la primera y la quinta, AH, guardarán la misma razón con la segunda, Γ, que la tercera y la sexta, ΔΘ, con la cuarta Z.



58. *Hosaútōs.*

59. Simson (1756), ed. cit., pág. 141, presenta una prueba más sencilla que evita la reiterada mediación de las proposiciones V 11, 15, 16, y se sirve de una aplicación directa de la prop. V 4. Esta versión cuenta con el apoyo de algunos mss., aunque no con la autoridad de una fuente textual como el ms. P. En todo caso, es justa su observación de que el último paso de la prueba debe referirse a los equimúltiplos H, K —de A, Δ— y Λ, N —de Γ, Z—, como a equimúltiplos cualesquiera. El propio Simson generalizará el alcance de esta proposición a un número cualquiera de magnitudes (l. c., págs. 141-142).

proposición a un número cualquiera de magnitudes (l. c., págs. 141-142).

Dado que BH es a Γ como EΘ a Z, entonces, por inversión, como Γ es a BH, así Z a EΘ. Puesto que AB es a Γ como ΔE a Z, y, como Γ es a BH, así Z a EΘ, entonces, por igualdad, como AB es a BH, así ΔE a EΘ [V, 22]. Ahora bien, puesto que las magnitudes son proporcionales por separación, también serán proporcionales por composición [V, 18]; luego, como AH es a HB, así ΔΘ es a ΘE. Pero, como BH es a Γ, así EΘ a Z; luego, por igualdad, como AH es a Γ, así ΔΘ es a Z [V, 22].

Por consiguiente, si una primera magnitud guarda con una segunda la misma razón que una tercera con una cuarta, y una quinta guarda con la segunda la misma razón que una sexta con la cuarta, la primera y la quinta, tomadas juntas, guardarán también la misma razón con la segunda que la tercera y la sexta con la cuarta. Q. E. D.

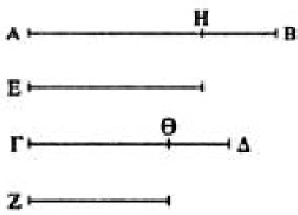
PROPOSICIÓN 25

Si cuatro magnitudes son proporcionales, la mayor y la menor (juntas) son mayores que las dos restantes.

Sean AB, ΓΔ, E, Z cuatro magnitudes proporcionales, (es decir que) como AB es a ΓΔ, así E a Z; y sea la mayor de ellas AB y la menor Z.

Digo que AB, Z son mayores que ΓΔ, E.

Pues hágase AH igual a E y ΓΘ igual a Z.



Dado que, como AB es a ΓΔ, así E es a Z, y E es igual a AH, mientras que Z (es igual) a ΓΘ, entonces como AB es a ΓΔ, así AH es a ΓΘ. Ahora bien, ya que el todo AB es al todo ΓΔ como la (parte) quitada AH es a la (parte) quitada ΓΘ, entonces la (parte) restante HB será a la (parte) restante ΘΔ como el todo AB es al todo ΓΔ [V, 19]. Pero AB es mayor que ΓΔ; luego HB también (será) mayor que ΘΔ. Y dado que AH es igual a E y ΓΘ a Z, entonces AH, Z son iguales a ΓΘ, E. Y si, no siendo iguales HB, ΘΔ, y siendo mayor HB, se añaden AH, Z a HB y se añaden ΓΘ, E a ΘΔ, se sigue que AB, Z son mayores que ΓΔ, E.

Por consiguiente, si cuatro magnitudes son proporcionales, la mayor de ellas y la menor (juntas) son mayores que las dos restantes. Q. E. D.

LIBRO SÉPTIMO

DEFINICIONES

1. Una unidad es aquello en virtud de lo cual cada una de las cosas que hay es llamada una.[60]
2. Un número es una pluralidad compuesta de unidades.[61]
3. Un número es parte de un número, el menor del mayor, cuando mide al mayor.

60. *Monás estin kath'hèn hékaston tôn óntōn hèn légetai.*

JÁMBLICO, en su *Comentario a la Introducción a la aritmética de Nicómaco* 11, 5, apunta que esta definición de Euclides es la de los autores más recientes (*hoi neóteroi*) y que le faltan las palabras *kàn systematikòn êi* «aunque sea un colectivo». En este mismo contexto recuerda otras definiciones:

a. «La unidad es una frontera (*methórion*) entre número y partes», en opinión de algunos pitagóricos.

b. Un pitagórico antiguo, TIMARIDAS, la define a su vez como «cantidad limitada» (*peraínusa posótes*). Teón de Esmirna añade la explicación de que una unidad es «aquello que, cuando la cantidad disminuye mediante sustracción continua, se ve privado de todo número y toma una posición y un resto permanentes». Si, tras haber llegado a la unidad por este medio, procediéramos a dividirla en partes, tendríamos de nuevo una cantidad.

c. Otros la definen —siempre según Jámblico— como forma de formas (*eidôn eîdos*) en atención a que comprende virtualmente todas las formas de un número, es decir: un número poligonal de cualquier número de lados a partir de tres, un número sólido en todas sus formas, y así sucesivamente. HEATH no se resiste a traer a colación a este propósito la noción moderna de número como «clase de clases», ed. cit., II, pág. 279.

d. ARISTÓTELES la definía como «lo indivisible en lo que se refiere a la cantidad» *tò katà tò posòn adiaíreton* (*Metafísica* 1089b35). Se diferencia del punto en que la unidad no tiene posición (*Metafsica* 1016b25). De acuerdo con esta última distinción, Aristóteles llama a la unidad «un punto sin posición» *stigmè áthetos* (*Metafísica* 1084b26).

e. Por último, Jámblico dice que la escuela de Crisipo define la unidad de una forma confusa (*synkechyménōs*), a saber: como «pluralidad uno» (*plêthos hén*).

La definición de Euclides parece dirigida a separar la unidad de la multiplicidad y de la divisibilidad —lo cual, en cierto modo, supondría una exclusión de las fracciones (cf. PLATÓN, *República* 525e)—. Pero, en todo caso, su utilidad matemática es muy inferior a sus resonancias filosóficas. El propio Platón ya había reparado, con cierta gracia, en esta dimensión de la definición «moderna»: «Hombres asombrosos, ¿acerca de qué números discurrís, en los cuales se halla la unidad tal como la consideráis, como igual a cualquier otra unidad sin diferir en lo más mínimo y sin contener en sí misma parte alguna?» (*República* VII 526a).

Por lo demás, Teón de Esmirna atribuye la etimología de *monás* «unidad» bien al hecho de permanecer inalterada cuando se multiplica por sí misma cualquier número de veces, o bien al hecho de mantenerse aislada (*memonôsthai*) del resto de los números. Nicómaco observa a su vez que mientras cualquier número es la mitad de la suma de los números adyacentes y de los números equidistantes, por cada lado, la unidad resulta más aislada pues no tiene números a ambos lados sino sólo a uno de ellos, amén de limitarse a ser la mitad del siguiente, el 2.

61. *Arithmós de tó ek monádōn synkeímenon plêthos.*

La definición de número de Euclides no es, una vez más, sino una de las muchas que conocemos. Nicómaco combina varias en una al decir que es «una pluralidad definida» (*plêthos horisménon*) o un «conjunto de unidades» (*monádōn sýstema*), o un «flujo de cantidad compuesto por unidades» (*posótētos chýma ek monádōn synkeímenon*). Teón dice que un número es una «colección de unidades», o una progresión (*propodismós*) de cantidad que parte de una unidad y una regresión (*anapodismós*) que acaba en una unidad. Según Jámblico, la descripción como colección de unidades fue aplicada a la cantidad, es decir al número, por Tales, que en esto seguía a los egipcios (*katà tò Aigyptiakón aréskon*). Mientras que Eudoxo el pitagórico fue quien habló del número como «pluralidad definida».

ARISTÓTELES presenta una serie de definiciones que insisten sobre lo mismo: «una pluralidad definida» *plêthos tò peperasménon* (*Metafísica* 1020a13), «pluralidad o combinación de unidades», o «pluralidad de in-

plethos to peperasmenon (*Metafísica* 1020a13); «pluralidad o combinación de unidades» o «pluralidad de in-

4. Pero partes cuando no lo mide.[62]
5. Y el mayor es múltiplo del menor cuando es medido por el menor.[63]
6. Un número par es el que se divide en dos partes iguales.
7. Un número impar es el que no se divide en dos partes iguales, o difiere de un número par en una unidad.[64]
8. Un número parmente par es el medido por un número par[65] según un número par.

---

divisibles» (*ibid.* 1053a30, 1039a12, 1085b22); «varios unos» *héna pleíō* (*Física III* 7, 207b7); «pluralidad que se puede medir por uno» (*Metafísica* 1057a3) y «pluralidad medida» y «pluralidad de medidas» siempre que la medida sea el uno *tò hén* (*ibid.* 1088a5).

Por otra parte, he traducido el término *plêthos* por «pluralidad» pues así se distingue tanto de *arithmós* «número» cómo de *posón* «cantidad». Otros contextos de los libros de aritmética exigirán, llegado el caso, una versión diferente.

62. Si por *méros* «parte» en la definición anterior se entiende una parte alícuota o submúltiplo, con el plural *mére* «partes», en esta definición, Euclides alude a un número de partes alícuotas o a lo que nosotros llamaríamos una fracción propia. De modo que, por ejemplo, el número 2 es parte del número 6, pero el número 4 no es parte, sino partes de este mismo número 6.

63. Esta definición viene a formular la relación recíproca de la establecida en la def. 3 (*supra*). El uso de estas nociones aritméticas en los *Elementos* envuelve algunas suposiciones tácitas sobre la relación de medir una cantidad un número de veces. Por ejemplo: si x mide a y e y mide a z, x mide a z; si x mide a y y mide a z, x mide a $y + z$; si x mide a y y mide a z, x medirá a $y - z$ o a $z - y$ (según que $y > z$ o $y < z$). Pero su limitación mayor es no ofrecer una conceptualización o una explicación de la noción involucrada de medida. Una reconstrucción axiomática moderna de la teoría aritmética de los *Elementos* puede verse en N. MALMENDIER, «Eine Axiomatik zum 7. Buch der *Elemente* von Euklid», *Mathematische-Physikalische Semesterberichte* 22 (1975), 240-254. Puede que el primer ensayo en la dirección de completar el marco de postulados, definiciones y axiomas de la aritmética clásica haya sido la *Arithmetica de* Jordano de Nemore (s. XIII); *vid.* la reciente edición de H. L. BUSARD, *Jordanus de Nemore. De elementis arithmetice artis*, Stuttgart, 1991, 2 vols.

64. NICÓMACO, *Introducción a la aritmética* I 7, 2, amplía estas definiciones de par e impar diciendo: «que es par el que puede ser dividido en dos partes iguales sin que caiga una unidad en el medio, y que es impar el que no puede ser dividido en dos partes iguales por la intervención (*mesiteían*) de la susodicha unidad». Añade que esta definición se deriva de una «concepción popular» (*ek tês dēmṓdous hypolḗpseōs*). Por contraste (*ib.* 7, 3), ofrece la definición de los pitagóricos: «un número par es el que puede ser dividido mediante una y la misma operación en (partes) mayores y menores, mayores en tamaño (*pelikóteti*) pero menores en cantidad (*posóteti*)..., mientras que un número impar es el que no puede ser tratado de la misma forma sino que es dividido en dos partes desiguales». Según Jámblico, esto quiere decir que un número par se divide en las partes mayores posibles, es decir en mitades, y en las menores posibles, es decir, en dos, que es el primer «número» o «colección de unidades». Nicómaco recoge luego otra antigua definición a tenor de la cual un número par es el que puede ser dividido en dos partes iguales y en dos partes desiguales (excepto el primero de ellos, que es el 2, que sólo puede dividirse en dos partes iguales), pero, se divida como se divida, tiene necesariamente las dos partes de la misma clase, o ambas pares, o ambas impares; mientras que un número impar es el que sólo puede dividirse en dos partes desiguales y esas dos partes son siempre de diferente clase, una par y otra impar. Por último, cabe mencionar las definiciones de número par e impar que se hacen referencia mutuamente y, precisamente por ello, se ven tildadas de no científicas por Aristóteles, a saber: «un número impar es el que difiere de un número par en una unidad por ambos lados, y un número par es el que difiere de un número impar en una unidad por cada lado» (cf. *Tópicos* 142b7-10). Sin embargo, el texto de los *Elementos* no duda en recoger una noción del mismo tipo como explicación alternativa, en la definición 7 de número impar.

65. La expresión griega *artiákis*, que aparece tanto en esta definición como en la siguiente, quiere decir «un número par de veces», siendo *artiákis ártios arithmós* «un número un-número-par-de-veces par» y *artiákis perissós* «un (número) un-número-par-de-veces impar». La traducción literal al castellano haría bastante complicado el uso de esta formulación en las proposiciones. Por ello, siguiendo un precedente como el de F. Vera, opto por la versión «parmente par» y «parmente impar». Aunque no sea un consuelo, cabe recordar que ya Nicómaco, entre otros, se había visto en la tesitura de recurrir a la expresión compuesta *artiopérittos* «parimpar» para referirse a este último tipo de números.

9. Y parmente impar es el medido por un número par según un número impar.
10. Imparmente par es el medido por un número impar según un número par].[66]
11. Un número imparmente impar es el medido por un número impar según un número impar.[67]
12. Un número primo es el medido por la sola unidad.[68]
13. Números primos entre sí son los medidos por la sola unidad como medida común.[69]
14. Número compuesto es el medido por algún número.

66. Heiberg considera esta definición interpolada por alguien que ha confundido la clasificación de Euclides con otra clasificación más bien pitagórica. Por lo demás, la expresión *perissákis ártios* «un (número) un-número-impar-de-veces par» no vuelve a utilizarse más en los *Elementos*, lo cual podría tomarse como síntoma del carácter enteramente superfluo de la definición.

Comunmente, siguiendo el ejemplo de la traducción latina de Heiberg, se omite esta definición, de modo que la definición VII 10 podría corresponder, en otras ediciones y traducciones, a la que aquí aparece como VII 11.

67. Las definiciones 8-11 desarrollan una clasificación euclídea que no dejó de ser discutida con posterioridad. Por ejemplo, la definición 8 de Euclides de número «parmente par» es diferente de la propuesta por autores posteriores, como Nicómaco, Teón o Jámblico. Una consecuencia del planteamiento euclídeo es que en la proposición IX 34 nos encontraremos con que un número puede ser a la vez «parmente par» y «parmente impar». De acuerdo con la clasificación más precisa que proponen sus críticos, «parmente par» y «parmente impar» se excluyen mutuamente. El número «parmente par» es, según esta otra clasificación, el que tiene pares sus mitades, las mitades de sus mitades y así sucesivamente hasta llegar a la unidad. Jámblico, en particular, tacha de errónea la definición de Euclides. No cabe duda, desde luego, de que la definición de Euclides es tal como aparece en el texto, pues, de otro modo, en IX 32, donde prueba que determinados números son sólo parmente pares, esa misma precisión *mónos* «sólo» estaría de más. Recordemos asimismo el caso de la proposición IX 34 que muestra claramente cuál es el punto de vista de Euclides.

Por otro lado, las proposiciones IX 33 y 34, también dan motivos para excluir la definición que Heiberg considera como una interpolación (*vid.* la nota anterior). De acuerdo con ella, un número parmente impar podría resultar también imparmente par. De modo que si tanto esta presunta definición 10 como la definición 9 fueran genuinas, las proposiciones IX 33 y IX 34 plantearían serios problemas. Pues en IX 33 podría darse el caso de que un número no fuera «sólo» parmente impar; y la prueba de IX 34 no dejaría de ser equívoca.

68. Nicómaco, Teón y Jámblico añaden a «número primo» *prôtos arithmós* el término *asýnthetos* «no compuesto». Teón lo define de manera similar a Euclides como «el medido por ningún número excepto la unidad». ARISTÓTELES dice también que un número primo no es medido por ningún número (*Analíticos Segundos* II 13, 16a36), pues la unidad no es un número (*Metafísica* 1088a6), sino sólo el principio del número. Para Nicómaco, los números primos no son una subdivisión de los números en general sino sólo de los impares. Dice que un número primo no admite otra parte (i.e., otro submúltiplo) que la que tiene su nombre derivado del del propio número (*parónymon heautôi*), por ejemplo «tres» no admite otra parte que «un tercio». Según esta teoría, los números primos empiezan por el 3, mientras que para Aristóteles el 2 sería el primer número primo y el único par. El testimonio aristotélico demuestra que esta divergencia con la doctrina pitagórica es anterior a Euclides. El número 2 cumple las condiciones de la definición euclídea, lo que sirve a Jámblico de pretexto para criticar a Euclides una vez más.

A los números primos se aplican en griego también otros nombres diferentes de *prôtos*. Jámblico los llama *euthimetrikoí;* Timaridas, *euthygrammikoí* «rectilíneos»; y una variante del anterior, *grammikoí*, «lineales», es el utilizado por Teón de Esmirna: ambas tienen en cuenta que sólo pueden ser representados por una línea.

Según Nicómaco, el término *prôtoi* se debe a que sólo se puede llegar a ellos juntando unidades y la unidad es el principio del número.

69. Teón define los números compuestos entre sí de manera similar a Euclides, y pone como ejemplo el 8 y el 6, que tienen al 2 como medida común, y el 6 y el 9, que cuentan con el 3. La clasificación euclídea de números primos y compuestos entre sí difiere, sin embargo, de las de Nicómaco y Jámblico. Este último considera que todos estos tipos de números son subdivisiones sólo de la clase de los números impares, mientras que los números pares se dividen, a su vez, en tres tipos: a) parmente pares; b) parimpares; c) imparpares. Los dos primeros, a y b, son los casos extremos, y los del tipo c son intermedios entre los otros dos tipos. Del mismo modo, la clase de los números impares se divide en tres tipos, de los que el tercero es intermedio

entre los otros dos: a) primos y no compuestos: que equivalen a los números primos de Euclides con excep-

15. Números compuestos entre sí son los medidos por algún número como medida común.
16. Se dice que un número multiplica a un número cuando el multiplicado se añade (a sí mismo) tantas veces como unidades hay en el otro y resulta un número.[70]
17. Cuando dos números, al multiplicarse entre sí, hacen algún (número), el resultado se llama (número) plano y sus lados son los números que se han multiplicado entre sí.[71]
18. Cuando tres números, al multiplicarse entre sí, hacen algún número, el resultado es un (número) sólido y sus lados son los números que se han multiplicado entre sí.
19. Un número cuadrado es el multiplicado por sí mismo o el comprendido por dos números iguales.
20. Y un (número) cubo el multiplicado dos veces por sí mismo o el comprendido por tres números iguales.[72]
21. Unos números son proporcionales cuando el primero es el mismo múltiplo o la misma parte o las mismas partes del segundo que el tercero del cuarto.[73]
22. Números planos y sólidos semejantes son los que tienen los lados proporcionales.
23. Número perfecto[74] es el que es igual a sus propias partes.[75]

---

ción del 2; b) secundarios y no compuestos: cuyos factores deben ser no sólo impares sino primos, por ejemplo 9, 15, 21...; c) secundarios y compuestos en sí mismos pero primos en relación con otros. También en este caso los factores deben ser impares y primos. Esta clasificación es objetable por limitar un término tan amplio como «compuesto» a los casos formados por factores primos.

70. Traduzco *syntethêi* por «se añade (a sí mismo)» para que resulte inteligible en castellano. Se trata de la definición sobradamente conocida de la multiplicación como suma abreviada.

71. Los términos plano y sólido aplicados a números proceden de la adaptación de su uso con referencia a figuras geométricas. De acuerdo con esto, un número recibe la calificación de lineal cuando es contemplado como si constara de una sola dimensión, la longitud. Cuando se le añade otra dimensión, la anchura, resulta un número plano, cuya forma más común es la que corresponde al rectángulo en Geometría. En la tradición pitagórica no dejaron de abundar estas y otras muestras de números figurados (e.g. los números cuadrados, generados por la adición de un *gnómon* impar, o los números oblongos, generados por la adición de un *gnómon* par). Por otra parte, el griego utiliza el verbo *poiéō* «hacer» para significar el proceso de la multiplicación *y gígnomai* para el resultado.

72. Para las definiciones de número cuadrado y número cubo Euclides emplea las curiosas expresiones *isákis ísos* e *isákis ísos isákis* respectivamente, cuya traducción literal es la siguiente: «igual número de veces igual» (Def 19) e «igual número de veces igual número de veces igual».

Nicómaco distingue un caso especial de número cuadrado que acaba (en la notación adoptada) en el mismo dígito o numeral que su lado, por ejemplo: 1, 25, 36, cuadrados de 1, 5 y 6 respectivamente. A estos números los llama cíclicos (*kyklikoí*) por analogía con los círculos, en geometría, que vuelven al punto donde han empezado. Por la misma razón a los números cubos que acaban con el mismo dígito que sus lados y los cuadrados de sus lados los llama esféricos.

73. Euclides no se plantea la noción de proporción en los mismos términos que otros autores anteriores o posteriores que definen la proporción como «igualdad o semejanza de razones». Por otra parte, habla normalmente de números «continuamente proporcionales» en el sentido de «proporcionales en orden, o sucesivamente».

74. La ley de formación de los números perfectos, dada por la fórmula $2n\ (2n - 1)$ cuando $2n - 1$ es un número primo, se demuestra en IX 36. Teón de Esmirna y Nicómaco añaden otros dos tipos de números: los «superperfectos», *hypertelḗs* o *hypertéleios*, cuando la suma de sus partes alícuotas (submúltiplos) es mayor que el propio número, por ejemplo la suma de las partes de 12 es $6 + 4 + 3 + 2 + 1 = 16$, y los «defectivos», *ellipḗs*, cuando la suma de las partes es menor que el propio número, por ejemplo la suma de las partes de 8 es $4 + 2 + 1 = 7$.

75. Los libros VII-IX cubren lo que podría llamarse «aritmética teórica elemental» griega. La suerte de la aritmética no deja de ser un tanto curiosa en Grecia. Por una parte, no tardó mucho en verse disociada de la

PROPOSICIÓN 1

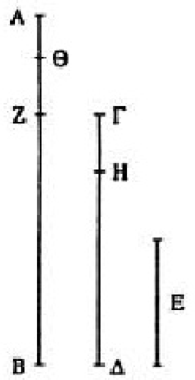
Dados dos números desiguales y restándose sucesivamente el menor del mayor, si el que queda no mide nunca al anterior hasta que quede una unidad, los números iniciales serán primos entre sí.

Pues sean AB, ΓΔ dos números [desiguales] tales que, restándose sucesivamente el menor del mayor, el que quede no mida nunca al anterior hasta que quede una unidad.

«logística» práctica, *i.e.* de las técnicas comunes de cálculo aplicadas a llevar las cuentas y a traficar con objetos materiales, a menesteres de carácter administrativo o mercantil. Al propio Pitágoras se le atribuyó una primera depuración *filosófica* o «teórica» de la aritmética: «Pitágoras honró la aritmética más que ningún otro. Hizo grandes avances en ella, sacándola de los cálculos prácticos de los comerciantes y tratando todas las cosas como números» (ARISTÓXENO, fr. 23). Esta «liberación», al parecer, no impidió a los pitagóricos mantener antiguos hábitos intuitivos de cálculo, como el de operar con guijarros o marcas (*logídsesthai pséphois*). Pero sí pudo contribuir a cierta idealización de los números y a la consideración de una «logística» teórica, interesada en propiedades y relaciones numéricas generales. Y, desde luego, contribuyó a elevar los números y sus relaciones, o «configuraciones», a la dignidad de símbolos iniciáticos o claves de comprensión del universo. Así, en pitagóricos tan notables como Filolao, la aritmética parece inseparable de la numerología. Una numerología que no dejará de tener varia y curiosa fortuna: cobra enjundia metafísica en el s. IV a.C. (con Espeusipo y Jenócrates); mucho más tarde, a partir del neopitagorismo del s. II d.C., retorna a la aritmología simbólica (e.g. en Nicómaco, Teón de Esmirna); luego, de la mano de Jámblico (s. IV), viene a desembocar en la teología. Por otro lado, al margen de los dos caminos principales de la aritmética griega (el de la teoría de los números —en parte recogida y en parte normalizada por los *Elementos*— y el de la simbología numerológica), irán quedando otras sugerencias sobre el desarrollo numérico de la razón y la proporción, innovaciones notacionales como la del *Arenario* de Arquímedes, investigaciones métricas como las de Herón o primicias «algebraicas» como las de Diofanto.

En realidad, la misma aparición de estos libros de aritmética en los *Elementos* de Euclides no deja de ser un tanto curiosa. Desde un punto de vista sistemático, sólo podría justificarse por relación a ciertas aplicaciones en el libro X. En todo caso, algunos desarrollos como los de la teoría del par/impar, o los primos relativos o la teoría misma de la proporción numérica, dan la impresión de que Euclides trabaja con un legado autónomo y autosuficiente. Es cierto que, en la tradición, la aritmética y la geometría se consideraban de la misma familia: al decir de Arquitas (según PORFIRIO, *In Ptol. Harm.* I 330, 26-331, 8), parecían «hermanas»; tampoco conviene olvidar el legado pitagórico de los números figurados. Pero, por otra parte, los números y las magnitudes geométricas son, según otra tradición no menos persistente, entidades dispares. No sólo por motivos de orden matemático (como el caso de la inconmensurabilidad o la perspectiva de la teoría generalizada de la proporción), sino también, quizá, por motivos filosóficos, e.g. la «pureza» mayor de la aritmética con respecto al mundo sensible, la categorización de lo discreto y lo continuo, la índole misma de los números como objetos susceptibles de hallazgo o determinación pero no de conformación o construcción —no hay postulados ni problemas expresos en los libros de aritmética de los *Elementos*—. En suma, la pregunta de por qué aparece aquí el venerable legado de la teoría de los números, puede todavía considerarse abierta.

Otra cuestión añadida es la curiosa circunstancia de que hoy no dispongamos de unos *Elementos de aritmética* dentro de la tradición matemática griega. Sobre la base de la antigüedad de buena parte del material con que trabaja Euclides, hay quienes insisten en la presunta existencia de unos *Elementos* pitagóricos (e.g. B. L. VAN WAERDEN, «Die postulate und Konstruktionen in der frühgriechischen Geometrie», *Archive for History of Exact Sciences* 18 (1978), 343-357; L. ZHMUD, «Pythagoras as a Mathematician», *Historia Mathematica* 16 (1989), 249-268). No hay datos que corroboren la inferencia. Pasando a otros tiempos muy posteriores —incluso a Euclides—, también se ha sugerido la existencia de unos *Elementos* de Diofanto (J. CHISTIANIDIS, «*Arithmetikè Stoikheiosis:* Un traité perdu de Diophante d'Alexandrie?», *Historia Mathematica* 18 (1991), 239-246); pero la principal base aducida, un escolio de un bizantino anónimo al *Comentario a la Introducción a la aritmética de Nicómaco*, de Jámblico, no parece demasiado fuerte para sostener esta conjetura. No obstante, sigue en pie la afirmación de Proclo de que «muchos autores han escrito tratados de *Elementos* sobre aritmética y astronomía» (73, 12-14).



Digo que AB, ΓΔ son primos entre sí, es decir que la sola unidad mide a AB, ΓΔ.

Pues si AB, ΓΔ no son primos entre sí, algún número los medirá. Mídalos (un número) y sea E; y ΓΔ, al medir a BZ, deje ZA menor que él mismo, y AZ, al medir a ΔH, deje HΓ menor que él mismo, y HΓ, al medir a ZΘ, deje una unidad ΘA.

Así pues, como E mide a ΓΔ, y ΓΔ mide también a BZ, entonces E mide también a BZ; pero mide también al total BA; por tanto medirá también al resto AZ. Ahora bien, AZ mide a ΔH; entonces E mide también a ΔH; pero mide así mismo al total ΔΓ; por tanto medirá también al resto ΓH. Pero ΓH mide a ZΘ; y mide así mismo al total ZA; luego medirá también a la unidad restante AΘ, aun siendo un número; lo cual es imposible. Por tanto, ningún número medirá a los números AB, ΓΔ.

Por consiguiente, AB, ΓΔ son primos entre sí [VII, Def. 13]. Q. E. D.

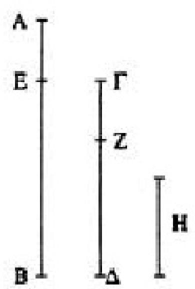
PROPOSICIÓN 2

Dados dos números no primos entre sí, hallar su medida común máxima.

Sean AB, ΓΔ los dos números dados no primos entre sí.

Así pues, hay que hallar la medida común máxima de AB, ΓΔ.

Si en efecto ΓΔ mide a AB, y se mide también a sí mismo, entonces ΓΔ es medida común de ΓΔ, AB. Y está claro que también es la máxima, pues ninguna mayor que ΓΔ medirá a ΓΔ.



Pero si ΓΔ no mide a AB, entonces, restándose sucesivamente el menor de los (números) AB, ΓΔ del mayor, quedará un número que medirá al anterior. Pues no quedará una unidad: porque en otro caso AB, ΓΔ serán primos entre sí [VII, 1], que es precisamente lo que se ha supuesto que no. Así pues, quedará un número que medirá al anterior. Ahora bien, ΓΔ, al medir a BE, deje EA menor que él mismo, y EA, al medir a ΔZ, deje ZΓ menor que él mismo, y mida ΓZ a AE. Así pues, como ΓZ mide a AE, y AE mide a ΔZ, entonces ΓZ medirá también a ΔZ; pero se mide también a sí mismo; entonces medirá también al total ΓΔ. Pero ΓΔ mide a BE; luego ΓZ mide a BE; y mide también a EA; por tanto medirá también al total BA; pero mide también a ΓΔ; entonces ΓZ mide a AB, ΓΔ. Por tanto, ΓZ es medida común de AB, ΓΔ.

Digo ahora que también es la máxima. Pues, si ΓZ no es la medida común máxima de AB, ΓΔ, un número que sea mayor que ΓZ medirá a los números AB, ΓΔ. Mídalos (un número) y sea H. Y como H mide a ΓΔ y ΓΔ mide a BE, entonces H mide también a BE; pero también mide al total BA; entonces medirá también al resto AE. Pero AE medirá a ΔZ; por tanto, H medirá a ΔZ y mide también al total ΔΓ; luego medirá también al resto ΓZ, esto es: el mayor al menor, lo cual es imposible; así pues, no medirá a los números AB, ΓΔ un número que sea mayor que ΓZ.

Por consiguiente, ΓZ es la medida común máxima de AB, ΓΔ.

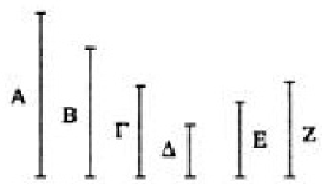
Porisma:

A partir de esto queda claro que, si un número mide a dos números, medirá también a su medida común máxima. Q. E. D.[76]

PROPOSICIÓN 3

Dados tres números no primos entre sí, hallar su medida común máxima.

Sean A, B, Γ los tres números dados no primos entre sí. Así pues, hay que hallar la medida común máxima de A, B, Γ.



Tómese pues la medida común máxima, Δ, de los dos (números) A, B [VII, 2]; entonces Δ o mide o no mide a Γ. En primer lugar mídalo; pero mide también a A, B; entonces Δ mide a A, B, Γ. Luego Δ es una medida común de A, B, Γ.

Digo ahora que también es la máxima. Pues si Δ no es la medida común máxima de A, B, Γ, un número que sea mayor que Δ medirá a los números A, B, Γ. Mídalos y sea E. Así pues, como E mide a A, B, Γ, entonces medirá también a A, B, luego medirá también a la medida común máxima de A, B [VII, 2, Por.]. Pero la medida común máxima de AB es Δ; entonces E mide a Δ, el mayor al menor; lo cual es imposible. Por tanto no medirá a los números A, B, Γ un número que sea mayor que Δ; entonces Δ es la medida común máxima de A, B, Γ.

Ahora no mida Δ a Γ.

Digo, en primer lugar, que Γ, Δ no son primos entre sí. Pues, como A, B, Γ no son primos entre sí, algún número los medirá. Entonces el que mida a A, B, Γ, medirá también a A, B; y medirá también a Δ la medida común máxima de A, B [VII, 2, Por.]; pero mide también a Γ; entonces un número medirá a Δ, Γ; luego Δ, Γ no son primos entre sí. Tómese, pues, su medida común máxima, E [VII, 2]. Y como E mide a Δ, mientras que Δ mide a A, B, entonces E también mide a A, B; pero mide también a Γ; luego E mide a A, B, Γ; por tanto, E es una medida común de A, B, Γ.

Digo ahora que también es la máxima. Pues, si E no es la medida común máxima de A, B, Γ, un número que sea mayor que E medirá a los números A, B, Γ. Mídalos y sea Z. Ahora bien, como Z mide a A, B, Γ, también mide a A, B; entonces también medirá a la medida común máxima de A, B [VII, 2, Por.]. Pero Δ es la medida común máxima de A, B; entonces Z mide a Δ; y mide también a Γ; luego Z mide a Δ, Γ; por tanto medirá también a la medida común máxima de Δ, Γ [VII, 2, Por.]. Pero E es la medida común

76. Si la proposición anterior puede considerarse como un «test» de la propiedad de ser primos relativos, ahora Euclides ofrece un método no menos eficaz para hallar la medida común máxima de dos números por el mismo método de sustracción recíproca sucesiva (*anthyphaireîn*). Puede que este método proceda de la determinación de razones entre dos secciones del monocordio —como sugiere A. Szabó—. Desde luego, la noción de *anthyphaíresis* parece relacionada con un concepto de razón numérica anterior a Euclides. (En X 2, 3, ofrecerá una nueva aplicación en un marco más general.) Por otro lado, la versión modernizada de este procedimiento en términos no ya de sustracción sino de división, y de su resultado como obtención del «máximo común divisor», puede prestarse a equívocos, e.g. al aproximar la aritmética euclídea a la moderna aritmética de fracciones. Mayor confusión sería una mezcla de todo ello tan curiosa como la acepción del uso «matemático» de *anthyphairéo* (referido a X 2, 3) en los términos: «sustraer alternativamente dos magnitudes para hallar el máximo denominador común» —en el *Diccionario Griego-Español* II, Madrid, C.S.I.C.,

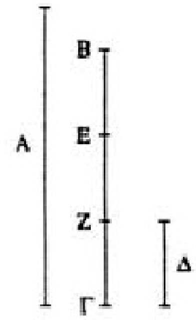
1986, pág. 309.

máxima de Δ, Γ; entonces Z mide a E, el mayor al menor, lo cual es imposible; por tanto, no medirá a los números A, B, Γ un número que sea mayor que E.

Por consiguiente, E es la medida común máxima de A, B, Γ. Q. E. D.[77]

PROPOSICIÓN 4

Todo número es parte o partes de todo número, el menor del mayor.



Sean dos números A, BΓ, y sea el menor BΓ.

Digo que BΓ es parte o partes de A.

Pues A, BΓ o son primos entre sí o no lo son.

En primer lugar sean primos entre sí. Entonces, si se divide BΓ en las unidades que hay en él, cada unidad de las que hay en BΓ será alguna parte de A; de modo que BΓ es partes de A.

Ahora no sean A, BΓ primos entre sí; entonces BΓ o mide a A o no (lo mide). Si en efecto BΓ mide a A, BΓ es parte de A. Pero, si no, tómese la medida común máxima, Δ, de A, BΓ [VII, 2] y divídase BΓ en los (números) BE, EΓ, ZΓ iguales a Δ. Ahora bien, como Δ mide a A, Δ es parte de A; pero Δ es igual a cada uno de los (números) BE, EZ, ZΓ; luego cada uno de los (números) BE, EZ, ZΓ es también parte de A. De modo que BΓ es parte de A.

Por consiguiente, todo número es parte o partes de todo número, el menor del mayor. Q. E. D.[78]

PROPOSICIÓN 5

Si un número es parte de un número, y otro es la misma parte de otro, la suma será también la misma parte de la suma que el uno del otro.

Pues sea el número A parte del número BΓ, y otro (número) Δ la misma parte de otro (número) EZ que A de BΓ.

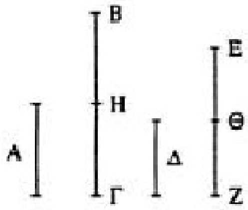
Digo que la suma de A, Δ es la misma parte de la suma de BΓ, EZ que A de BΓ.

77. Herón señala que este método nos permite hallar la medida común máxima de tantos números como queramos y no sólo de tres, porque cualquier número que mida a dos números medirá también a su medida común máxima. Así que se trata de ir hallando sucesivamente la medida común máxima de pares de números, hasta que queden sólo dos números de los que se hallará la medida común máxima. Euclides asume tácitamente esta extensión en VII 33 donde se toma la medida común máxima de tantos números como se quiera.

Estas proposiciones iniciales 1-3 del libro VII presentan el llamado «algoritmo» euclídeo para la determinación de números primos y la obtención de la medida común máxima entre dos o más números no primos entre sí. Esa denominación no es inadecuada en la media en que, ciertamente, representan un procedimiento de cálculo efectivo, i.e. una rutina metódica capaz de conducirnos en una serie finita de pasos a un resultado preciso.

78. En términos modernos se podría resumir como sigue:

Dados dos números A y B, en primer lugar se halla su máximo común divisor, C. Si C es contenido *x* veces en A e *y* veces en B, *x* e *y* precisarán la razón de A a B. De esta forma, la razón de *10* a *15*, por ejemplo, será *2/3*.



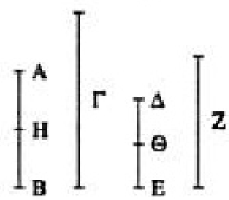
Pues como la parte que es A de BΓ, la misma parte es Δ de EZ, entonces, cuantos números hay en BΓ iguales a A, tantos números hay en EZ iguales a Δ. Divídase BΓ en BH, HΓ iguales a A, y EZ en EΘ, ΘZ iguales a Δ. Entonces la cantidad de los (números) BH, HΓ será igual a la cantidad de los (números) EΘ, ΘZ. Y como BH es igual a A y EΘ es igual a Δ, entonces BH, EΘ son iguales a A, Δ. Por lo mismo, HΓ, ΘZ son también iguales a A, Δ. Por tanto, cuantos números hay en BΓ iguales a A, tantos hay en BΓ, EZ iguales a A, Δ. Luego, cuantas veces BΓ es múltiplo de A, tantas veces lo es también la suma de BΓ, EZ de la suma de A, Δ.

Por consiguiente, la parte que A es de BΓ, la misma parte es también la suma de A, Δ de la suma de BΓ, EZ. Q. E. D.[79]

PROPOSICIÓN 6

Si un número es partes de un número y otro (número) es las mismas partes de otro (número), la suma será también las mismas partes de la suma que el uno del otro.

Pues sea el número AB partes del número Γ, y otro (número) ΔE las mismas partes de otro (número), Z, que AB de Γ.



Digo que la suma de AB, DE es también las mismas partes de la suma Γ, Z que AB de Γ.

Pues como las partes que AB es de Γ, las mismas partes es también ΔE de Z, entonces, cuantas partes de Γ hay en AB, tantas partes de Z hay también en ΔE. Divídase AB en las partes AH, HB de Γ, y ΔE en las partes ΔΘ, ΘE de Z; entonces la cantidad de los (números) AH, HB será igual a la cantidad de los (números) ΔΘ, ΘE. Y como la parte que AH es de Γ, la misma parte es también ΔΘ de Z, entonces la parte que es AH de Γ, la misma parte es también la suma de AH, ΔΘ de la suma de Γ, Z [VII 5]. Por lo mismo, la parte que es HB de Γ, la misma parte es también la suma de HB, ΘE de la suma de Γ, Z.

Por consiguiente, las partes que es AB de Γ, las mismas partes es también la suma de AB, ΔE de la suma de Γ, Z. Q. E. D.[80]

PROPOSICIÓN 7

Si un número es la misma parte de un número que un (número) restado de (un número) restado, el resto será la misma parte del resto que el total del total.

Pues sea el número AB la misma parte del número ΓΔ que el número (restado) AE del (número) restado ΓZ.

79. En términos modernos se podría resumir:
Dados cuatro números A, B, C, D.
Si $A = (1/n)\,B$ y $C = (1/n)\,D$, entonces $A + C = (1/n)\,(B + D)$.
Esta proposición puede relacionarse con V 1, donde las demostraciones son bastante similares, pero en V 1, se habla de «múltiplo», mientras que en VII 5, se trata de «parte» o submúltiplo.

80. Si $A = (m/n)\,B$, $C = (m/n)\,D$, entonces: $A + C = (m/n)\,(B + D)$.

Digo que el resto, EB, es también la misma parte del resto, ZΔ, que el total AB del total ΓΔ.

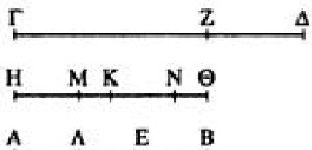
Pues la parte que AE es de ΓZ, la misma parte sea también EB de ΓH. Y como la parte que AE es de ΓZ, la misma parte es también EB de ΓH, entonces la parte que AE es de ΓZ, la misma parte es también AB de HZ [VII, 5]. Pero la parte que AE es de ΓZ, la misma parte se ha supuesto que es AB de ΓΔ; entonces la parte que es AB de HZ, es también la misma parte de ΓΔ, luego HZ es igual a ΓΔ. Quítese de ambos ΓZ; entonces el resto HΓ es igual al resto ZΔ. Y como la parte que AE es de ΓZ, la misma parte es también EB de HΓ, y HΓ es igual a ZΔ, entonces la parte que AE es de ΓZ, la misma parte es EB de ZΔ. Ahora bien, la parte que AE es de ΓZ, la misma parte es también AB de ΓΔ.

Por consiguiente, el resto EB es la misma parte del resto ZΔ que el total, AB, del total, ΓΔ. Q. E. D.[81]

PROPOSICIÓN 8

Si un número es las mismas partes de un número que un (número) restado de un (número) restado, el resto será las mismas partes del resto que el total del total.

Pues sea el número AB las mismas partes del número ΓΔ que el (número) restado AE del (número) restado ΓZ.



Digo que el resto, EB, es también la misma parte del resto ZΔ que el total AB del total ΓΔ.

Hágase HΘ igual a AB. Entonces las partes que HΘ es de ΓΔ, las mismas partes es también AE de ΓZ. Divídase HΘ en las partes HK, KΘ de ΓΔ y AE en las partes AΛ, ΛE de ΓZ; entonces la cantidad de los números HK, KΘ será igual a la cantidad de los (números) AΛ, ΛE. Y como la parte que HK es de ΓΔ, la misma parte es también AΛ de ΓZ, y ΓΔ es mayor que ΓZ, entonces HK es también mayor que AΛ. Hágase HM igual a AΛ. Entonces la parte que HK es de ΓΔ, la misma parte es también HM de ΓZ; por tanto, el resto MK es la misma parte del resto ZΔ que el total HK del total ΓΔ [VII, 7].

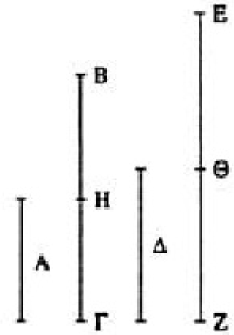
Como la parte que KΘ es de ΓΔ, la misma parte es, a su vez, EΛ de ΓZ, y ΓΔ es mayor que ΓZ, entonces ΘK es mayor que EΛ. Hágase KN igual a EΛ. Entonces la parte que KΘ es de ΓΔ, la misma parte es KN de ΓZ. Por tanto, el resto NΘ es la misma parte del resto ZΔ que el total KΘ del total ΓΔ [VII, 7]. Pero se ha demostrado que el resto MK es la misma parte del resto ZΔ que el total HK del total ΓΔ; así pues, la suma de MK, NΘ es también las mismas partes de ΔZ que el total ΘH del total ΓΔ. Pero la suma de MK, NΘ es igual a EB, y ΘH a BA.

Por consiguiente, el resto EB es las mismas partes del resto ZΔ que el total AB del total ΓΔ. Q E. D.

81. Si $A = (1/n)\,B$; $C = (1/n)\,D$, entones: $A - C = (1/n)\,(B - D)$.

PROPOSICIÓN 9

Si un número es parte de un número y otro (número) es la misma parte de otro, también, por alternancia, la parte o partes que el primero es del tercero, la misma parte o partes será el segundo del cuarto.



Pues sea el número A parte del número BΓ, y otro (número) Δ la misma parte de otro EZ que A de BΓ.

Digo que también, por alternancia, la parte o partes que A es de Δ, la misma parte o partes es también BΓ de EZ.

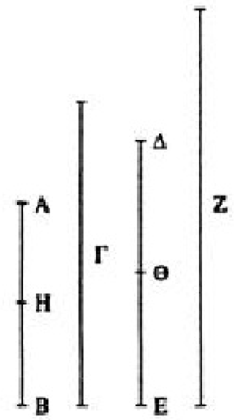
Pues como A es parte de BΓ y Δ es la misma parte de EZ, entonces, cuantos números iguales a A hay en BΓ, tantos hay también en EZ iguales a Δ. Divídase BΓ en los (números) BH, HΓ iguales a A, y EZ en los (números) EΘ, ΘZ iguales a Δ; entonces, la cantidad de los (números) BH, HΓ será igual a la cantidad de los (números) EΘ, ΘZ.

Ahora bien, puesto que los números BH, HΓ son iguales entre sí, y los números EΘ, ΘZ son también iguales entre sí, mientras que la cantidad de los (números) BH, HΓ es igual a la cantidad de los (números) EΘ, ΘZ, entonces la parte o partes que BH es de EΘ, la misma parte o las mismas partes es también HΓ de ΘZ; de modo que también la parte o partes que BH es de EΘ, la misma parte o las mismas partes es la suma de ambos, BΓ, de la suma de ambos, EZ. Pero BH es igual a A y EΘ a Δ.

Por consiguiente, la parte o partes que A es de Δ, la misma parte o las mismas partes es BΓ de EZ. Q. E. D.[82]

PROPOSICIÓN 10

Si un número es partes de un número y otro (número) es las mismas partes de otro, también, por alternancia, las partes o parte que el primero es del tercero, las mismas partes o la misma parte será también el segundo del cuarto.



Pues sea el número AB partes del número Γ, y otro (número) ΔE las mismas partes de otro Z.

Digo que también, por alternancia, las partes o parte que AB es de ΔE, las mismas partes o la misma parte es también Γ de Z.

Pues como las partes que AB es de Γ, las mismas partes es ΔE de Z, entonces, cuantas partes de Γ hay en AB, tantas partes (habrá) también en ΔE de Z. Divídase AB en las partes de Γ, a saber: AH, HB, y ΔE en las partes de Z, a saber: ΔΘ, ΘE; entonces la cantidad de los (números) AH, HB será igual a la cantidad de los (números) ΔΘ, ΘE. Ahora bien, puesto que la parte que AH es de Γ, la misma parte es también ΔΘ de Z, también, por alternancia, la parte o partes que AH es de ΔΘ, la misma parte o las mismas partes es también Γ de Z [VII, 9]. Por lo mismo entonces, la parte o partes que HB es de ΘE, la misma parte o las mismas partes es también Γ de Z; de modo que asimismo [la parte o partes que AH es de ΔΘ, la

82. Si $A = l/B$, $C = (l/n)\, D$, $A = (m/n)\, C$, entonces: $B = (m/n)\, D$.

misma parte o las mismas partes es también HB de ΘE; por tanto la parte o partes que AH es de ΔΘ, la misma parte o las mismas partes es también AB de ΔE; pero se ha demostrado que la parte o partes que AH es de ΔΘ, la misma parte o las mismas partes es Γ de Z, y entonces] las partes o parte que es AB de ΔE, las mismas partes o parte es también Γ de Z [VII, 5, 6]. Q. E. D.[83]

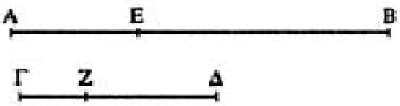
PROPOSICIÓN 11

Si como un todo es a un todo, así es un número restado a un (número) restado, también el resto será al resto como el todo al todo.

Como el todo AB es al todo ΓΔ, sea así el (número) restado AE al (número) restado ΓZ.

Digo que también el resto EB es al resto ZΔ como el todo AB es al todo ΓΔ.

Puesto que, como AB es a ΓΔ, así ΔE a ΓZ, entonces la parte o partes que AB es de ΓΔ, la misma parte o las mismas partes es AE de ΓZ [VII, Def. 21]. Luego el resto EB es la misma parte o partes de ZΔ que AB de ΓΔ [VII, 7, 8].



Por consiguiente, como EB es a ZΔ, así AB a ΓΔ [VII, Def. 21]. Q. E. D.[84]

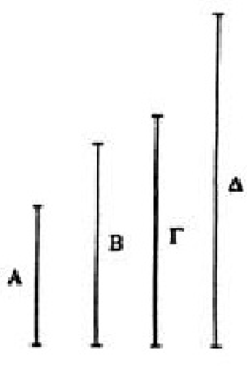
PROPOSICIÓN 12

Si unos números, tantos como se quiera, fueren proporcionales, como uno de los antecedentes es a uno de los consecuentes, así todos los antecedentes serán a todos los consecuentes.

Sean A, B, Γ, Δ tantos números como se quiera en proporción, (es decir que) como A es a B, así Γ es a Δ.

Digo que como A es a B, así A, Γ a B, Δ.

Pues, dado que, como A es a B, así Γ a Δ, entonces, la parte o partes que A es de B, la misma parte o partes es también Γ de Δ



83. Heiberg, sobre la base del ms. P, concluye que el texto entre corchetes es una interpolación atribuible a Teón por figurar en el margen en este importante manuscrito y aparecer escrito por una mano posterior.

84. Euclides asume en las proposiciones 11-13 que el primer número es menor que el segundo o que el segundo y el tercero. Las figuras de estas proposiciones son inconsistentes con esta suposición. Si los hechos concuerdan con las figuras hay que tener en cuenta otras posibilidades que se encuentran en la definición 21 de este libro, a saber: que el primer número puede ser también un múltiplo más una parte o partes de cada número con el que se compara. Así pues, habría que tomar en consideración diferentes casos.

Por lo demás, esta proposición se corresponde con V 19, que se aplica a magnitudes. El enunciado es prácticamente el mismo cambiando *mégethos* «magnitud» por *arithmós* «número». La prueba es una combinación de VII, Def. 21, y los resultados de VII 7-8, y el lenguaje de las proporciones se adapta al de los números y fracciones mediante la definición 21 del libro VII.

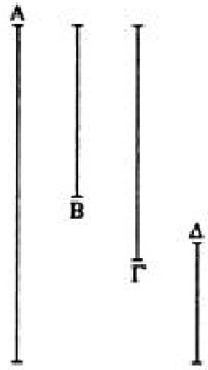
meros y fracciones mediante la definición 21 del libro VII.

[VII, Def. 21]. Luego la suma de ambos A, Γ es la misma parte o las mismas partes de la suma de ambos B, Δ que A de B [VII, 5, 6].

Por consiguiente, como A es a B, así A, Γ a B, Δ [VII, Def. 21]. Q. E. D.[85]

PROPOSICIÓN 13

Si cuatro números son proporcionales, también por alternancia serán proporcionales.



Sean A, B, Γ, Δ cuatro números proporcionales (es decir, que) como A es a B, así Γ a Δ.

Digo que también por alternancia, serán proporcionales (es decir, que) como A es a Γ, así B a Δ.

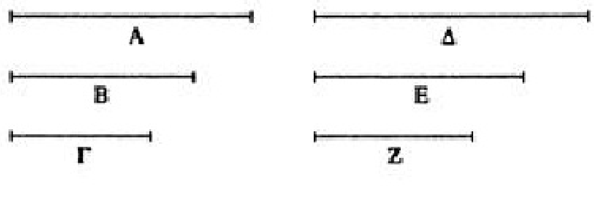
Puesto que, como A es a B, así Γ a Δ, entonces la parte o partes que A es de B, la misma parte o las mismas partes es también Γ de Δ [VII, Def. 21]. Luego, por alternancia, la parte o partes que A es de Γ, la misma parte o las mismas partes es también B de Δ [VII, 10].

Por consiguiente, como A es a Γ, así B a Δ [VII, Def. 21]. Q. E. D.[86]

PROPOSICIÓN 14

Si hay unos números, tantos como se quiera, y otros iguales a ellos en cantidad que, tomados de dos en dos, guardan la misma razón, también, por igualdad, guardarán la misma razón.

Sean A, B, Γ tantos números como se quiera y Δ, E, Z otros iguales a ellos en cantidad que, tomados de dos en dos, guardan la misma razón, (es decir que) como A es a B, así Δ a E, y como B es a Γ, así E a Z.



Digo que también, por igualdad, como A es a Γ, así Δ a Z.

Puesto que, como A es a B, así Δ a E, entonces, por alternancia, como A es a Δ, así B a E [VII, 13]. Así mismo, dado que como B es a Γ, así E a Z, entonces, por alternancia, como B es a E, así Γ a Z [VII, 13]. Pero, como B es a E, así A a Δ; por tanto, como

85. Esta proposición se corresponde con V 12, y, como en el caso de la anterior, el enunciado es prácticamente el mismo sustituyendo «magnitud» por «número». La prueba combina, a su vez, la definición VII 21, y los resultados de VII 5-6, que se declaran verdaderos para cualquier cantidad de números y no sólo para dos como en los enunciados de VII 5-6.

86. *Si* $a : b :: c : d$, entonces, por alternancia: $a : c :: b : d$.

La proposición se corresponde con V 16, y la prueba conecta VII, Def. 21, con el resultado de VII 10.

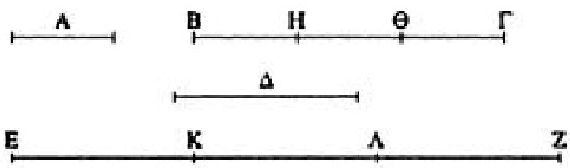
A es a Δ, así también Γ a Z; luego, por alternancia, como A es a Γ, así Δ a Z [VII, 13]. Q. E. D.[87]

PROPOSICIÓN 15

Si una unidad mide a un número cualquiera, y un segundo número mide el mismo número de veces a otro número cualquiera, por alternancia, la unidad medirá también al tercer número el mismo número de veces que el segundo al cuarto.

Pues mida la unidad A a un número cualquiera BΓ, y mida un segundo número, Δ, a otro número cualquiera EZ el mismo número de veces.

Digo que, por alternancia, la unidad A mide también al número Δ el mismo número de veces que BΓ a EZ.



Pues como la unidad A mide al número BΓ el mismo número de veces que Δ a EZ, entonces, cuantas unidades hay en BΓ, tantos números hay en EZ iguales a Δ. Divídase BΓ en sus unidades BH, HΘ, ΘΓ, y EZ en los (números) EK, KΛ, ΛZ iguales a Δ. Entonces la cantidad de las (unidades) BH, HΘ, ΘΓ será igual a la cantidad de los (números) EK, KΛ, ΛZ.

Ahora bien, puesto que las unidades BH, HΘ, ΘΓ son iguales entre sí, y los números EK, KΛ, ΛZ son también iguales entre sí, mientras que la cantidad de las unidades BH, HΘ, ΘΓ, es igual a la cantidad de los números EK, KΛ, ΛZ, entonces, como la unidad BH es al número EK, así la unidad HΘ será al número KΛ y la unidad ΘΓ al número ΛZ. Así pues, como uno de los antecedentes es a uno de los consecuentes, así serán todos los antecedentes a todos los consecuentes [VII, 12]; por tanto, como la unidad BH es al número EK, así BΓ es a EZ. Pero la unidad BH es igual a la unidad A, y el número EK es igual al número Δ. Luego, como la unidad A es al número Δ, así BΓ es a EZ.

Por consiguiente, la unidad A mide al número Δ el mismo número de veces que Br a EZ. Q. E. D.[88]

87. *Si* $a : b :: d : e$ y $b : c :: e : f$ entonces, por igualdad: $a : c :: d : f$.

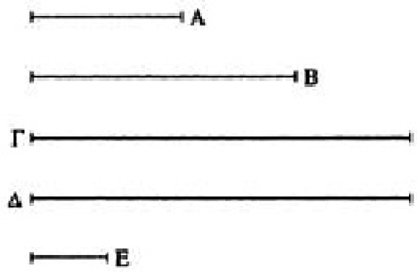
Y lo mismo es verdad sin que importe cuántos sean los sucesivos números relacionados. Este método no puede usarse para la proposición correspondiente de magnitudes (V 22); porque sólo probaría V 22 para seis magnitudes homogéneas, y las magnitudes de V 22 no están sujetas a dicha limitación.

88. Esta proposición puede considerarse un caso particular de VII 9.

66. Esta proposición puede considerarse un caso particular de VII 9.

PROPOSICIÓN 16

Si dos números, al multiplicarse entre sí, hacen ciertos (números), los (números) resultantes serán iguales entre sí.[89]



Sean A, B los dos números, y A, al multiplicar a B, haga el (número) Γ, y B, al multiplicar a A, haga el (número) Δ.

Digo que Γ es igual a Δ.

Dado que A, al multiplicar a B ha hecho el (número) Γ, entonces B mide a Γ según las unidades de A. Pero la unidad E mide también al número A según sus unidades; entonces la unidad E mide al número A el mismo número de veces que B a Γ. Entonces, por alternancia, la unidad E mide al número B el mismo número de veces que A a Γ [VII, 15]. Puesto que B, al multiplicar a A, ha hecho a su vez el (número) Δ, entonces A mide a Δ según las unidades de B. Pero la unidad E mide también a B según sus unidades; entonces la unidad E mide al número B el mismo número de veces que A a Δ. Pero la unidad E medía al número B el mismo número de veces que A a Γ; por tanto, A mide el mismo número de veces a cada uno de los (números) Γ, Δ.

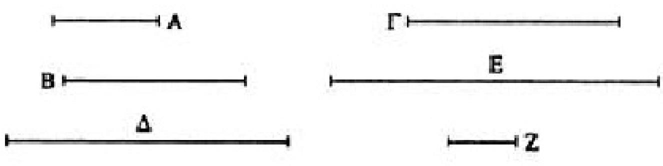
Por consiguiente, Γ es igual a Δ. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 17

Si un número, al multiplicar a dos números, hace ciertos (números), los (números) resultantes guardarán la misma razón que los multiplicados.

Pues haga el número A, al multiplicar a los números B, Γ, los (números) Δ, E.

Digo que como B es a Γ, así Δ a E.



Pues dado que A, al multiplicar a B, ha hecho el (número) Δ, entonces B mide a Δ según las unidades de A. Pero la unidad Z también mide al número A según sus unidades; entonces la unidad Z mide a A el mismo número de veces que B a Δ. Por tanto, como la unidad Z es al número A, así B es a Δ [VII, Def. 21]. Por lo mismo, como la unidad Z es al número A, así también Γ a E; luego, como B es a Δ, así Γ es a E.

Por consiguiente, por alternancia, como B es a Γ, así Δ a E [VII, 13]. Q. E. D.

89. *Hoi genómenoi ex autôn* «los números resultantes a partir de ellos». Esta expresión es la utilizada normalmente para el resultado de multiplicaciones. En este caso las palabras *ex autôn* resultan ambiguas, se refieren a los números inicialmente dados. Creo que suprimirlas es la mejor manera de deshacer la ambigüedad.

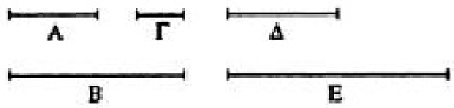
Por otra parte, la proposición prueba que el orden de factores no altera el producto.

PROPOSICIÓN 18

Si dos números, al multiplicar a un número cualquiera, hacen ciertos (números), los resultantes guardarán la misma razón que los multiplicados.

Pues hagan los dos números A, B, al multiplicar a un número cualquiera, Γ, los (números) Δ, E.

Digo, que, como A es a B, así Δ a E.



Pues, dado que A, al multiplicar a Γ, ha hecho el (número) Δ, entonces Γ, al multiplicar a A, también ha hecho el número Δ [VII, 16]. Por lo mismo, también Γ, al multiplicar a B, ha hecho el número E. Entonces el número Γ, al multiplicar a los dos números A, B, ha hecho los (números) Δ, E.

Por consiguiente, como A es a B, así Δ a E [VII, 17]. Q. E. D.

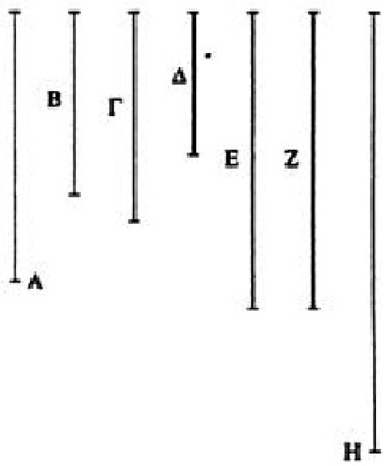
PROPOSICIÓN 19

Si cuatro números son proporcionales, el producto[90] *del primero y el cuarto será igual al del segundo y el tercero; y si el producto del primero y el cuarto es igual al producto del segundo y el tercero, los cuatro números serán proporcionales.*

Sean A, B, Γ, Δ cuatro números proporcionales (tales que) como A es a B, así Γ a Δ; y A, al multiplicar a Δ, haga el (número) E, y B, al multiplicar a Γ, haga el (número) Z.

Digo que E es igual a Z.

Pues A, al multiplicar a Γ, haga el (número) H.



Así pues, dado que A, al multiplicar a Γ, ha hecho el (número) H, y, al multiplicar a Δ, ha hecho el (número) E, entonces, el número A, al multiplicar a los dos números Γ, Δ, ha hecho los (números) H, E. Luego, como Γ es a Δ, así H es a E [VII, 17]. Pero como Γ es a Δ, así A es a B; entonces, como A es a B, así también H es a E. Puesto que Δ, al multiplicar a Γ, ha hecho a su vez el (número) H, mientras que B, al multiplicar a Γ, ha hecho el (número) Z; entonces, los dos números A, B, al multiplicar a cierto número, Γ, han hecho los (números) H, Z.

Por tanto, como A es a B, así H a Z [VII, 18]. Pero, como A es a B, así H a E; entonces, como H es a E, así también H a Z. Por tanto, H guarda la misma razón con cada uno de los (números) E, Z. Luego E es igual a Z [V, 9].

Sea E ahora igual a Z.

Digo que, como A es a B, así Γ a Δ.

90. A partir de aquí traduzco por «producto» la expresión griega utilizada comunmente para el resulta-

do de la multiplicación *ho genómenos ek...* «el (número) resultante (o producido) a partir de».

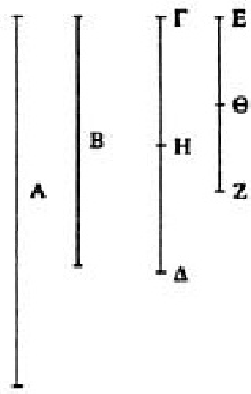
Pues, siguiendo la misma construcción, dado que E es igual a Z, entonces, como H es a E, así H a Z [V, 7]. Pero como H es a E, así Γ a Δ [VII, 17], mientras que, como H es a Z, así A a B [VII, 18].

Por consiguiente, como A es a B, así también Γ a Δ. Q. E. D.[91]

PROPOSICIÓN 20

Los números menores de aquellos que guardan la misma razón que ellos miden a los que guardan la misma razón el mismo número de veces, el mayor al mayor y el menor al menor.

Pues sean ΓΔ, EZ los números menores de aquellos que guardan la misma razón que A, B.



Digo que ΓΔ mide a A el mismo número de veces que EZ a B.

Porque ΓΔ no es partes de A, pues, si fuera posible, sea así; entonces EZ es las mismas partes de B que ΓΔ de A [VII, 13 y Def. 21]. Luego, cuantas partes hay en ΓΔ de A, tantas partes hay en EZ de B. Divídase ΓΔ en las partes ΓH, HΔ de A, y EZ en las partes EΘ, ΘZ de B; entonces la cantidad de los (números) ΓH, HΔ será igual a la cantidad de los (números) EΘ, ΘZ. Ahora bien, puesto que los números ΓH, HΔ son iguales entre sí y los números EΘ, ΘZ son también iguales entre sí, mientras que la cantidad de los (números) ΓH, HΔ es igual a la cantidad de los (números) EΘ, ΘZ, entonces, como ΓH es a EΘ, así HΔ a ΘZ. Por tanto, como uno de los antecedentes es a uno de los consecuentes, así todos los antecedentes serán a todos los consecuentes [VII, 12]. Luego, como ΓH es a EΘ, así ΓΔ a EZ; por tanto, ΓH, EΘ guardan la misma razón que ΓΔ, EZ, siendo menores que ellos; lo cual es imposible: porque se ha supuesto que ΓΔ, EZ son los menores de los que guardan la misma razón que ellos. Luego ΓΔ no es partes de A; entonces es parte (de A) [VII, 4]. Y EZ es la misma parte de B que ΓΔ de A [VII, 13 y Def 21].

Por consiguiente, ΓΔ mide a A el mismo número de veces que EZ a B. Q. E. D.[92]

PROPOSICIÓN 21

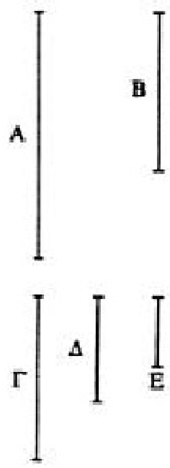
Los números primos entre sí son los menores de aquellos que guardan la misma razón que ellos.

Sean A, B números primos entre sí.

91. Heiberg relega al apéndice una proposición que aparece en los mss. V, p, en el sentido de que, si tres números son proporcionales, el producto de los extremos es igual al cuadrado del medio, y viceversa. No aparece en la primera mano de P; B la tiene en el margen y Campano la omite. Al-Nayrīzī cita la proposición sobre tres números proporcionales como una observación a VII 19 debida probablemente a Herón.

92. Aquí Heiberg omite una proposición que sin duda es una interpolación de Teón (B, V, p la tienen como VII 22, pero P la presenta en el margen y en la última mano; Campano la omite también). Prueba, para números, la proporción perturbada:

Si $a : b :: e : f$ y $b : c :: d : e$, entonces $a : c :: d : f$.



Digo que A, B son los menores de aquellos que guardan la misma razón que ellos.

Pues, si no, habrá algunos números menores que A, B que guarden la misma razón que A, B. Sean Γ, Δ.

Así pues, como los números menores de los que guardan la misma razón miden a los que guardan la misma razón el mismo número de veces, el mayor al mayor y el menor al menor, es decir, el antecedente al antecedente y el consecuente al consecuente [VII, 20], entonces Γ mide a A el mismo número de veces que Δ a B.

Pues cuantas veces Γ mide a Δ, tantas unidades habrá en E. Por tanto, Δ mide a B según las unidades de E. Pero, puesto que Γ mide a A según las unidades de E, entonces E mide a A según las unidades de Γ [VII, 16]. Luego, por lo mismo, E mide también a B según las unidades de Δ [VII, 16]. Entonces E mide a A, B que son primos entre sí. Lo cual es imposible [VII, Def. 13]. Luego no habrá algunos números menores que A, B que guarden la misma razón con A, B.

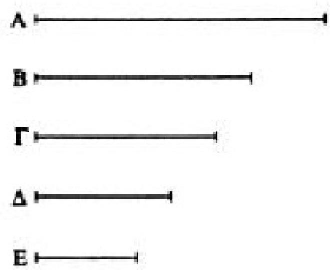
Por consiguiente, A, B son los menores de aquellos que guardan la misma razón que ellos. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 22

Los números menores de aquellos que guardan la misma razón que ellos son primos entre sí.

Sean A, B los números menores de aquellos que guardan la misma razón que ellos.

Digo que A, B son primos entre sí.



Pues, si no son primos entre sí, algún número los medirá. Mídalos (un número) y sea Γ. Y, cuantas veces mide Γ a A, tantas unidades haya en Δ, y, cuantas veces Γ mide a B, tantas unidades haya en E.

Puesto que Γ mide a A según las unidades de Δ, entonces Γ, al multiplicar a Δ, ha hecho el (número) A [VII, Def. 16]. Por lo mismo, también Γ, al multiplicar a E, ha hecho el (número) B. Así pues, el número Γ, al multiplicar a los dos números Δ, E ha hecho los (números) A, B; por tanto, como Δ es a E, así A a B [VII, 17]; entonces Δ, E guardan la misma razón que A, B, siendo menores que ellos, lo cual es imposible. Luego ningún número medirá a los números A, B.

Por consiguiente, A, B son primos entre sí. Q. E. D.[93]

93. Beppo Levi, *Leyendo a Euclides*, Rosario, 1947, pág. 208, dice que los enunciados de 20, 21 y 22, suponen implícitamente por lo menos uno de los siguientes hechos: existe un par de números mínimos entre los que guardan una misma razón; existe un par de números primos entre sí entre los pares que guardan la misma razón. Pues, aunque se admite como evidente la existencia de un mínimo en todo sistema de enteros, no es evidente la existencia de un par mínimo

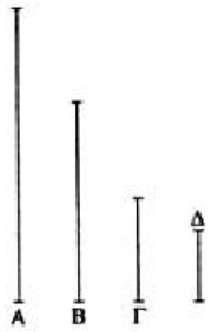
PROPOSICIÓN 23

Si dos números son primos entre sí, el número que mide a uno de ellos será primo respecto al restante.

Sean A, B dos números primos entre sí, y mida a A un número cualquiera Γ.

Digo que también Γ, B son primos entre sí.

Pues si Γ, B no son primos entre sí, algún número medirá a Γ, B. Mídalos y sea Δ. Puesto que Δ mide a Γ, mientras que Γ mide a A, entonces Δ mide también a A. Pero mide también a B; entonces Δ mide a A, B que son primos entre sí; lo cual es imposible [VII, Def. 12]. Por tanto ningún número medirá a los números Γ, B.

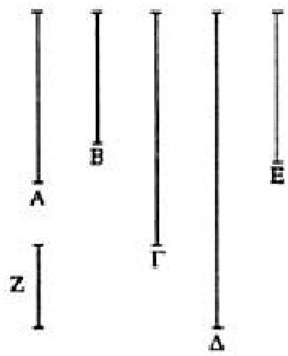


Por consiguiente, Γ, B son primos entre sí. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 24

Si dos números son primos con respecto a otro número, también su producto será primo con respecto al mismo (número).

Sean los dos números A, B primos con respecto a un número Γ, y A, al multiplicar a B, haga Δ.



Digo que Γ, Δ son primos entre sí.

Pues si Γ, Δ no son primos entre sí, algún número medirá a Γ, Δ. Mídalos y sea E. Ahora bien, puesto que Γ, A son primos entre sí, y cierto número E mide a Γ, entonces A, E son primos entre sí [VII, 23]. Entonces, cuantas veces E mide a Δ, tantas unidades hay en Z; por tanto, Z mide también a Δ según las unidades de E [VII, 16]. Luego E, al multiplicar a Z, ha hecho el número Δ [VII, Def. 16]. Pero también A, al multiplicar a B, ha hecho el (número) Δ; así pues, el (producto) de E, Z es igual al (producto) de A, B. Pero si el producto de los extremos es igual al producto de los medios, los cuatro números son proporcionales [VII, 19].

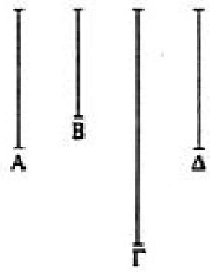
Entonces, como E es a A, así B es a Z. Pero A, E son primos (entre sí) y los primos son también los menores, y los números menores de los que guardan la misma razón que ellos miden a los que guardan la misma razón el mismo número de veces, el mayor al mayor y el menor al menor, es decir: el antecedente al antecedente y el consecuente al consecuente [VII, 20]. Por tanto, E mide a B; pero también mide a Γ; luego E mide a B, Γ que son primos entre sí; lo cual es imposible [VII, Def. 13]. Por tanto ningún número medirá a los números Γ, Δ.

Por consiguiente, Γ, Δ son primos entre sí. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 25

Si dos números son primos entre sí, el producto de uno de ellos (multiplicado por sí mismo) será primo con respecto al restante.[94]

Sean A, B dos números primos entre sí, y A, al multiplicarse a sí mismo, haga Γ.



Digo que B, Γ son primos entre sí.

Hágase, pues, Δ igual a A. Puesto que A, B son primos entre sí, mientras que A es igual a Δ, entonces también Δ, B son primos entre sí. Así pues cada uno de los (números) Δ, A es primo con respecto a B; luego el producto de Δ, A será primo con respecto a B [VII, 24], pero el número producido a partir de Δ, A es Γ.

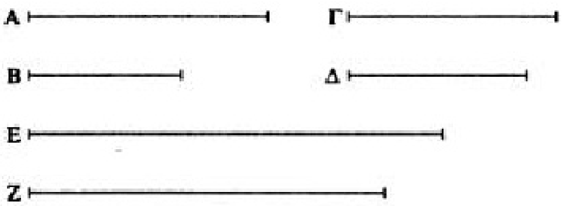
Por consiguiente, Γ, B son primos entre sí. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 26

Si dos números son primos con respecto a dos números, uno y otro con cada uno de ellos, sus productos también serán primos entre sí.

Pues sean A, B dos números primos ambos con respecto a cada uno de los dos números Γ, Δ, y A, al multiplicar a B, haga E, y Γ, al multiplicar a Δ, haga Z.

Digo que E, Z son primos entre sí.



Pues como cada uno de los (números) A, B son primos con respecto a Γ, entonces el producto de A, B también será primo con respecto a Γ [VII, 24]. Pero el producto de A, B es E; luego E, Γ son primos entre sí. Por lo mimo, Δ, E también son primos entre sí. Entonces cada uno de los (números) Γ, Δ es primo con respecto a E. Por tanto, el producto de Γ, Δ será también primo con respecto a E [VII, 24]. Pero el producto de los (números) Γ, Δ es Z.

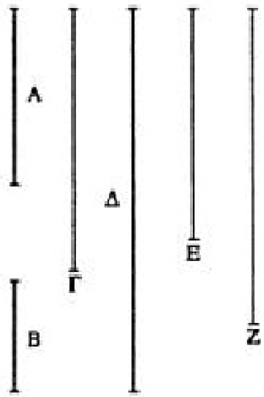
Por consiguiente los números E, Z son primos entre sí. Q. E. D.

94. *Ho ek toû henòs autôn genómenos*, lit.: «el (número) producido por uno de ellos...» se refiere al producto de dicho número por sí mismo. Añado estas palabras entre paréntesis porque no aparecen en el texto

griego. Por otra parte, la proposición es un caso particular de la precedente.

PROPOSICIÓN 27

Si dos números son primos entre sí y al multiplicarse cada uno a sí mismo hace algún otro (número), sus productos serán primos entre sí, y si los números iniciales, al multiplicar a los productos, hacen ciertos números, también ellos serán primos entre sí [y siempre sucede esto con los extremos].[95]



Sean A, B dos números primos entre sí, y A al multiplicarse a sí mismo haga el (número) Γ, y al multiplicar a Γ haga el (número) Δ; por otra parte, B al multiplicarse a sí mismo haga el (número) E, y al multiplicar a E haga el (número) Z.

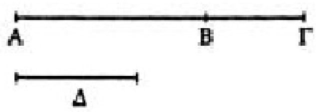
Digo que Γ, E y Δ, Z son primos entre sí.

Pues como A, B son primos entre sí, y A al multiplicarse a sí mismo ha hecho el (número) Γ, entonces Γ, B son primos entre sí [VII, 25]. Dado que, en efecto, Γ, B son primos entre sí y B, al multiplicarse por sí mismo, ha hecho el (número) E, entonces Γ, E son primos entre sí [VII, 25]. A su vez, como A, B son primos entre sí y B al multiplicarse a sí mismo ha hecho el (número) E, entonces A, E son primos entre sí [VII, 25]. Así pues, como los dos números A, Γ son primos ambos con respecto a cada uno de los dos números B, E, entonces el producto de A, Γ es también primo con respecto al (producto) de B, E [VII, 26]. Pero el (producto) de A, Γ es Δ, mientras que el (producto) de B, E es Z.

Por consiguiente, Δ, Z son primos entre sí. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 28

Si dos números son primos entre sí, su suma también será un (número) primo con respecto a cada uno de ellos; y si la suma de ambos es un (número) primo con respecto a uno cualquiera de ellos, también los números iniciales serán primos entre sí.



Súmense pues los dos números primos entre sí AB, BΓ.

Digo que también la suma de ambos, AΓ, es un (número) primo con respecto a cada uno de los (números) AB, BΓ.

Pues si ΓA, AB no son primos entre sí, algún número medirá a ΓA, AB. Mídalos y sea Δ. Así pues, como Δ mide a ΓA, AB, entonces medirá también al resto BΓ. Pero mide también a BA; entonces Δ mide a AB, BΓ que son primos entre sí; lo cual es imposible [VII, Def. 13]. Por tanto ningún número medirá a ΓA, AB; luego ΓA, AB son primos entre sí. Por lo mismo, AΓ, ΓB son también primos entre sí. Entonces ΓA es primo con respecto a cada uno de los (números) AB, BΓ.

Sean ahora ΓA, AB primos entre sí.

Digo que AB, BΓ son también primos entre sí.

Pues si AB, BΓ no son primos entre sí, algún número medirá a los (números) AB, BΓ. Mídalos y sea Δ. Ahora bien, como Δ mide a cada uno de los (números) AB, BΓ,

95. Heiberg atetiza el final del enunciado porque *ákroi* sólo podría significar «los últimos productos» y porque no hay nada en la prueba que se corresponda con estas palabras. De hecho Campano las omite. Hei-

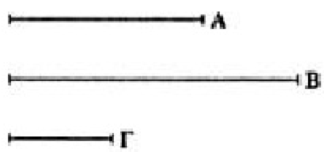
berg concluye que se trata de una interpolación anterior a Teón.

entonces medirá también al total ΓA. Pero mide también a AB; entonces Δ mide a los (números) ΓA, AB que son primos entre sí; lo cual es imposible [VII, Def. 13]. Luego ningún número medirá a los (números) AB, BΓ.

Por consiguiente, AB, BΓ son primos entre sí. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 29

Todo número primo es primo con respecto a todo (número) al que no mide.



Sea A un número primo y no mida a B. Digo que B, A son primos entre sí.

Pues si B, A no son primos entre sí, algún número los medirá. Mídalos y sea Γ. Puesto que Γ mide a B, pero A no mide a B, entonces Γ no es el mismo (número) que A. Y puesto que Γ mide a B, A, entonces mide también a A que es primo no siendo el mismo (que Γ); lo cual es imposible; luego ningún número medirá a los (números) B, A.

Por consiguiente, A, B son primos entre sí. Q. E. D.

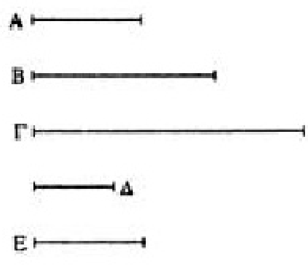
PROPOSICIÓN 30

Si dos números, al multiplicarse entre sí, hacen algún (número) y algún número primo mide a su producto, también medirá a uno de los iniciales.

Hagan, pues, los dos números A, B, al multiplicarse entre sí, el (número) Γ, y mida algún número primo, Δ, al (número) Γ.

Digo que Δ mide a uno de los (números) A, B.

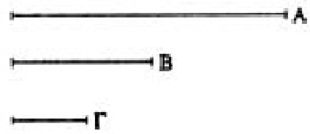
Pues no mida a A; pero Δ es primo; entonces A, Δ son primos entre sí [VII, 29]. Ahora bien, cuantas veces mida Δ a Γ, tantas unidades haya en E. Así pues, como Δ mide a Γ según las unidades de E, entonces Δ, al multiplicar a E, ha hecho el (número) Γ [VII, Def. 16]. Pero, en efecto, A, al multiplicar a B, ha hecho también el (número) Γ; entonces el (producto) de Δ, E es igual al (producto) de A, B. Luego, como Δ es a A, así B a E [VII, 19]. Pero Δ, A son primos y los primos son también los menores [VII, 21], y los menores miden el mismo número de veces a los que guardan la misma razón, el mayor al mayor y el menor al menor, es decir el antecedente al antecedente y el consecuente al consecuente [VII, 20]; así pues, Δ mide a B. De manera semejante demostraríamos que, si no mide a B, medirá a A.



Por consiguiente, o mide a uno de los (números) A, B. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 31

Todo número compuesto es medido por algún número primo.



Sea A un número compuesto.

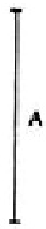
Digo que A es medido por algún número primo.

Pues como A es compuesto, algún número lo medirá. Mídalo y sea B. Ahora bien, si B es primo se habría dado lo propuesto. Pero si es compuesto, algún número lo medirá. Mídalo y sea Γ. Pues bien, como Γ mide a B y B mide a A, entonces Γ mide también a A. Y si Γ es primo, se habría dado lo propuesto. Pero si es compuesto, algún número lo medirá.[96] Siguiendo así la investigación se hallará un número primo, que lo medirá. Pues, si no se halla, una serie infinita de números medirán al número A, cada uno de los cuales es menor que otro; lo cual es imposible en el (caso de) los números. Luego se hallará un número primo que medirá al anterior a él mismo, que también medirá a A.

Por consiguiente, todo número compuesto es medido por algún número primo. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 32

Todo número o es primo o es medido por algún (número) primo.



Sea A un número.

Digo que A o es primo o es medido por algún (número) primo.

Pues si A es primo se habría dado lo propuesto, pero si es compuesto, algún número primo lo medirá [VII, 31].

Por consiguiente, todo número o es primo o es medido por algún (número) primo. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 33

Dados tantos números como se quiera, hallar los menores de aquellos que guardan la misma razón que ellos.

Sean A, B, Γ tantos números dados como se quiera.

Así pues hay que hallar los menores de los que guardan la misma razón que A, B, Γ.

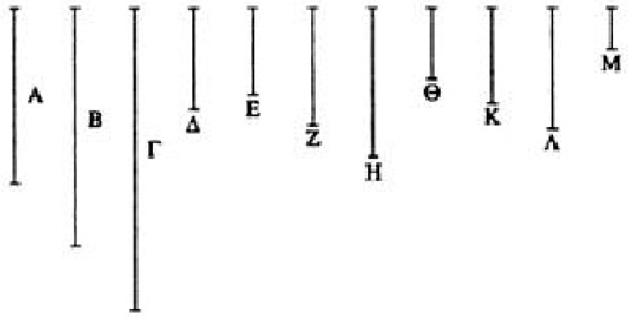
Pues A, B, Γ o son primos entre sí o no. Si, en efecto, son primos entre sí, son los menores de los que guardan la misma razón que ellos [VII, 21].

Pero si no, tómese la medida común máxima, Δ, de A, B, Γ; y, cuantas veces mida Δ a cada uno de los (números) A, B, Γ, tantas unidades haya en cada uno de los (números) E, Z, H. Entonces, los números A, B, Γ miden respectivamente a los (números) E,

96. Se echan en falta en esta proposición las palabras «al anterior a él mismo que también medirá a A» que aparecen unas líneas más abajo. Heiberg piensa que es posible que dichas palabras hayan desaparecido de P en este lugar, debido a un error de *homeoteleuton*. Por otro lado, relega al apéndice una prueba alterna-

tiva de esta proposición, cf. HEATH, ed. cit., pág. 333.

Z, H, según las unidades de Δ [VII, 16]. Luego E, Z, H miden el mismo número de veces a A, B, Γ; por tanto, E, Z, H guardan la misma razón que A, B, Γ [VII, Def. 21].



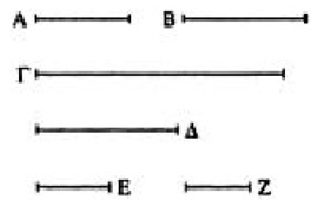
Digo además que también son los menores.

Pues si E, Z, H no son los menores de los que guardan la misma razón que A, B, Γ, habrá unos números menores que E, Z, H que guarden la misma razón con A, B, Γ. Sean Θ, K, Λ; entonces Z mide a A el mismo número de veces que K, Λ miden respectivamente a B, Γ. Ahora bien, cuantas veces Θ mide a A, tantas unidades haya en M; entonces K, Λ miden respectivamente a B, Γ según las unidades de M. Y puesto que Θ mide a A según las unidades de M, entonces M mide también a A según las unidades de Θ [VII, 16]. Por lo mismo, M mide a B, Γ según las unidades de K, Λ respectivamente; luego M mide a A, B, Γ. Y como Θ mide a A según las unidades de M, entonces Θ, al multiplicar a M, ha hecho el (número) A [VII, Def. 16]. Por lo mismo, E al multiplicar a Δ ha hecho también el (número) A. Entonces el (producto) de E, Δ es igual al (producto) de Θ, M. Luego, como E es a Θ, así M es a Δ [VII, 19]. Ahora bien, E es mayor que Θ; entonces M es también mayor que Δ, y mide a los (números) A, B, Γ; lo cual es imposible: porque se ha supuesto que Δ es la medida común máxima de A, B, Γ. Por tanto, no habrá ningún número menor que E, Z, H que guarde la misma razón que A, B, Γ.

Por consiguiente, E, Z, H son los (números) menores de los que guardan la misma razón con A, B, Γ. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 34

Dados dos números, hallar el menor número al que miden.



Sean A, B los dos números dados.

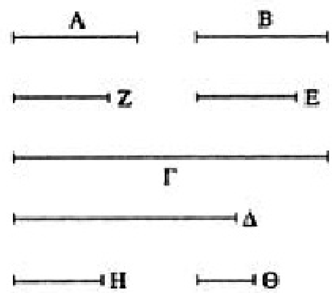
Así pues hay que hallar el menor número al que miden.

Pues bien, A, B o son primos entre sí o no. En primer lugar sean A, B primos entre sí, y A al multiplicar a B haga el (número) Γ; entonces B al multiplicar a A ha hecho también el (número) Γ [VII, 16]. Entonces A, B miden a Γ.

Digo además que también es el menor (número al que miden).

Pues, si no, A, B medirán a algún número que sea menor que Γ. Midan a Δ. Y cuantas veces A mide a Δ, tantas unidades haya en E, y, cuantas veces B mide a Δ, tantas unidades haya en Z; entonces A, al multiplicar a E, ha hecho el (número) Δ, y B, al multiplicar a Z, ha hecho el (número) Δ [VII, Def. 16]; entonces el (producto) de A, E es igual al (producto) de B, Z. Por tanto, como A es a B, así Z a E [VII, 19]; pero A, B son primos, y los primos son también los menores [VII, 21] y los menores miden a los que primos, y los primos son también los menores [VII, 21] y los menores miden a los que guardan la misma razón el mismo número de veces, el mayor al mayor y el menor al menor [VII, 20]; así pues, B mide a E, como el consecuente al consecuente. Y como A, al multiplicar a B, E, ha hecho los (números) Γ, Δ, entonces, como B es a E, así Γ a Δ [VII, 17]. Pero B mide a E; luego Γ mide también a Δ, el mayor al menor; lo cual es imposible. Por tanto, A, B no miden a algún número que sea menor que Γ. Luego Γ es el menor que es medido por A, B.

Ahora, no sean A, B primos entre sí, y tómense los números menores Z, E de los que guardan la misma razón con A, B [VII, 33]; entonces, el (producto) de A, E es igual al (producto) de B, Z [VII, 19]. Y haga A, al multiplicar a E, el (número) Γ; entonces B, al multiplicar a Z, ha hecho también el (número) Γ; así pues, A, B miden a Γ.



Digo además que también es el menor (número al que miden).

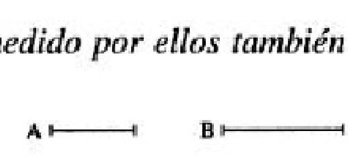
Pues, si no, A, B medirán a algún número que sea menor que Γ. Midan a Δ. Y cuantas veces A mide a Δ, tantas unidades haya en H, y cuantas veces B mide a Δ, tantas unidades haya en Θ. Entonces, A al multiplicar a H ha hecho el número Δ, y B al multiplicar a Θ ha hecho el número Δ. Así pues, el (producto) de A, H es igual al (producto) de B, Θ; luego, como A es a B, así Θ a H [VII, 19]. Pero como A es a B, así Z a E. Por tanto, también, como Z es a E, así Θ a H. Pero Z, E son los menores, y los menores miden a los que guardan la misma razón el mismo número de veces, el mayor al mayor y el menor al menor [VII, 20]. Entonces, E mide a H. Y como A, al multiplicar a E, ha hecho los números Γ, Δ, entonces, como E es a H, así Γ a Δ [VII, 17]. Pero E mide a H; luego Γ también mide a Δ, el mayor al menor; lo cual es imposible. Por tanto, A, B no miden a algún número que sea menor que Γ.

Por consiguiente, Γ es el número menor que es medido por A, B. Q. E. D.[97]

PROPOSICIÓN 35

Si dos números miden a algún número, el (número) menor medido por ellos también medirá al mismo (número).

Pues midan dos números A, B a un número ΓΔ y sea E el menor (al que miden).

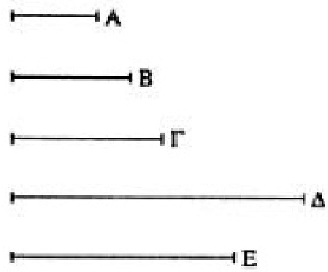


Digo que E mide también a ΓΔ.

Pues si E no mide a ΓΔ, deje E, al medir a ΔZ, al número menor que sí mismo ΓZ. Y como A, B miden a E y E mide a ΔZ, entonces, A, B medirán también a ΔZ. Pero miden también al total ΓΔ; luego, medirán también a ΓZ que es menor que E; lo cual es imposible. Por tanto, no es el caso de que E no mida a ΓΔ; por consiguiente lo mide. Q. E. D.

97. Se trata del procedimiento para hallar el mínimo común múltiplo de dos números.

PROPOSICIÓN 36



Dados tres números, hallar el número menor al que miden.

Sean A, B, Γ tres números dados.

Así pues, hay que hallar el número menor al que miden.

Tómese, pues, Δ, el (número) menor que es medido por los dos (números) A, B [VII, 34]. Entonces Γ o mide a Δ o no lo mide. En primer lugar, mídalo. Pero A, B miden también a Δ; entonces A, B, Γ miden a Δ.

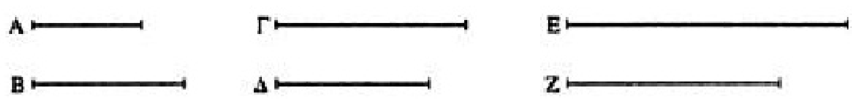
Digo además que también es el menor (al que miden).

Pues, si no, A, B, Γ medirán a un número que sea menor que Δ. Midan a E. Como A, B, Γ miden a E, entonces A, B también miden a E. Así pues, el menor (número) medido por A, B también medirá [a E] [VII, 35]. Pero el menor (número) medido por A, B es Δ; entonces, Δ medirá a E, el mayor al menor; lo cual es imposible. Luego, A, B, Γ no medirán a algún número que sea menor que Δ; por tanto, Δ es el número menor que A, B, Γ miden.

Ahora, por el contrario, no mida Γ a Δ, y tómese E, el menor número medido por Γ, Δ [VII, 34]. Como A, B miden a Δ, pero Δ mide a E, entonces, A, B miden también a E. Pero Γ mide también [a E]; entonces A, B, Γ miden también [a E].

Digo además que es el menor (número al que miden).

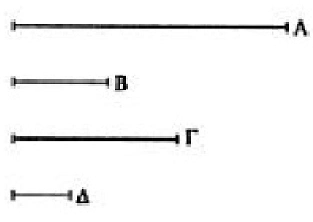
Pues, si no, A, B, Γ medirán a algún (número) que sea menor que E. Midan a Z. Como A, B, Γ miden a Z, entonces A, B miden también a Z; luego el menor (número) medido por A, B medirá a Z [VII, 35].



Pero el menor (número) medido por A, B es Δ; entonces, Δ mide a Z. Pero Γ también mide a Z; por tanto, Δ, Γ mide a Z; de modo que el menor (número) medido por Δ, Γ también medirá a Z. Pero el menor (número) medido por Γ, Δ es E. Entonces E mide a Z, el mayor al menor; lo cual es imposible. Por tanto, A, B, Γ no medirán a un número que sea menor que E.

Por consiguiente, E es el menor que es medido por A, B, Γ. Q. E. D.[98]

PROPOSICIÓN 37



Si un número es medido por algún número, el (número) medido tendrá una parte homónima del (número) que lo mide.

Sea medido, pues, A por algún número B.

Digo que A tiene una parte homónima de B.

Pues cuantas veces B mide a A, tantas unidades haya en Γ. Como B mide a A según las unidades de Γ, y la unidad Δ mide

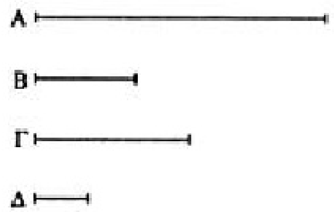
98. El método de Euclides para hallar el *m. c. m.* de tres números nos es familiar. Primero se halla el *m.*

c. m. de *a*, *b*, sea *d;* y después se halla el *m. c. m.* de *d* y *c*.

al número Γ según sus propias unidades, entonces, la unidad Δ mide al número Γ el mismo número de veces que B a Δ. Así pues, por alternancia, la unidad Δ mide al número B el mismo número de veces que Γ a A [VII, 15]; entonces la parte que la unidad Δ es del número B, la misma parte es también Γ de A. Pero la unidad Δ es una parte del número B homónima de él; entonces Γ es también una parte de A homónima de B. De modo que A tiene una parte Γ que es homónima de B. Q. E. D.[99]

PROPOSICIÓN 38

Si un número tiene una parte cualquiera, será medido por un número homónimo de la parte.



Tenga, pues, el número A una parte cualquiera B, y sea Γ homónimo de la parte B.

Digo que Γ mide a A.

Pues como B es una parte de A homónima de Γ, y la unidad Δ es una parte de Γ homónima de él, entonces la parte que la unidad Δ es del número Γ, la misma parte es también B de A; entonces la unidad Δ mide al número Γ el mismo número de veces que B a A. Así pues, por alternancia, la unidad Δ mide al número B el mismo número de veces que Γ a A [VII, 15].

Por consiguiente, Γ mide a A. Q. E. D.

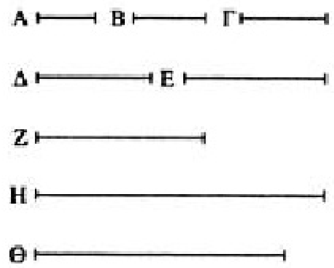
PROPOSICIÓN 39

Hallar un número que sea el menor que tenga unas partes dadas.

Sean las partes dadas A, B, Γ.

Así pues, hay que hallar un número que sea el menor que tenga las partes A, B, Γ.

Pues sean Δ, E, Z números homónimos de las partes A, B, Γ; y tómese H, el menor (número) medido por Δ, E, Z [VII, 36].



Entonces, H tiene partes homónimas de Δ, E, Z [VII, 37]. Pero A, B, Γ son partes homónimas de Δ, E, Z, Γ; entonces tiene las partes A, B, Γ.

Digo además que es también el menor.

Pues, si no, habrá un número menor que H que tenga las partes A, B, Γ. Sea Θ. Puesto que Θ tiene las partes A, B, Γ, entonces Θ será medido por los números homónimos de las partes A, B, Γ [VII, 38]. Pero Δ, E, Z son números homónimos de las partes A, B, Γ; entonces Θ es medido por los (números) Δ, E, Z. Y es menor que H; lo cual es imposible.

Por consiguiente, no habrá ningún número menor que H que tenga las partes A, B, Γ. Q. E. D.

99. El texto del enunciado precisa de una explicación. Por ejemplo, si *3* mide a *A*, es decir: Si $A = 3m = (3+3+...3)$, la proposición afirma que hay un número que es un *tercio* de *A*.

Si B mide a A, existe un número que es la B^{ava} parte de A.

LIBRO NOVENO

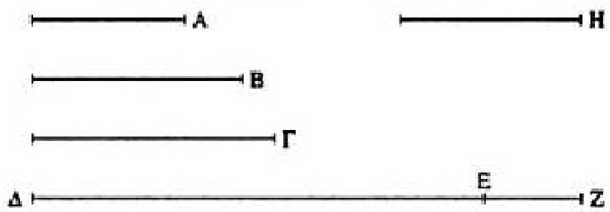
PROPOSICIÓN 20

Hay más números primos que cualquier cantidad propuesta de números primos.

Sean A, B, Γ los números primos propuestos.

Digo que hay más números primos que A, B, Γ.

Pues tómese el número menor medido por A, B, Γ y sea ΔE y añádase a ΔE la unidad EZ. Entonces EZ o es primo o no. Sea primo en primer lugar; entonces han sido hallados los números primos A, B, Γ, EZ, (que son) más que A, B, Γ.



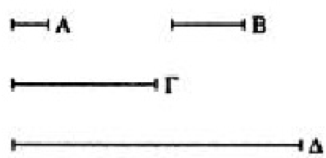
Pero ahora no sea primo EZ; entonces es medido por algún número primo [VII, 31]: sea medido por el número primo H.

Digo que H no es el mismo que ninguno de los números A, B, Γ. Pues, si fuera posible, séalo. Pero A, B, Γ miden a ΔE; entonces H medirá también a ΔE. Pero mide asimismo a EZ; y H, siendo un número, medirá también a la unidad restante ΔZ; lo cual es absurdo. Luego H no es el mismo que ninguno de los (números) A, B, Γ. Y se ha supuesto que es primo. Por consiguiente, han sido hallados más números primos que la cantidad propuesta de los (números) A, B, Γ. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 36

Si tantos números como se quiera a partir de una unidad se disponen en proporción duplicada hasta que su (suma) total resulte (un número) primo, y el total multiplicado por el último produce algún número, el producto será (un número) perfecto.

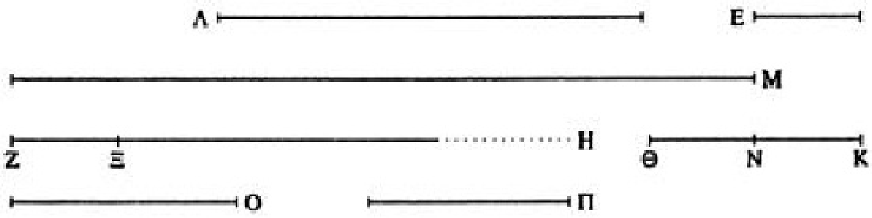
Pues dispónganse tantos números como se quiera, A, B, Γ, Δ, a partir de una unidad en proporción duplicada hasta que su (suma) total resulte (un número) primo, y sea E igual al total, y E, al multiplicar a Δ, haga ZH.



Digo que ZH es un (número) perfecto.

Pues cuantos números son en cantidad A, B, Γ, Δ, tómense tantos números E, ΘK, Λ, M en proporción duplicada a partir de E; entonces, por igualdad, como A es a Δ, así E a M [VII, 14]. Así pues, el producto de E, Δ es igual al (producto) de A, M [VII, 19]. Ahora bien, el producto de E, Δ es ZH; entonces el (producto) de A, M es también ZH. Luego A, al multiplicar a M, ha hecho ZH; por tanto, M mide a ZH según las unidades de A. Pero A es una díada; luego ZH es el doble de M. Pero M, Λ, ΘK, E son sucesivamente el doble uno de otro; entonces E, ΘK, Λ, M, ZH son continuamente proporcionales en proporción duplicada.

Ε, ΘΚ, Λ, Μ, ΖΗ son continuadamente proporcionales en proporción duplicada.



Ahora, del segundo ΘK y del último ZH quítense ΘN, ZΞ respectivamente iguales a E. Entonces, como el exceso del segundo número es al primero, así es el exceso del último a todos los anteriores a él [IX, 35]. Así pues, como NK es a E, así ΞH a M, Λ, KΘ, E. Y NK es igual a E; entonces ΞH también es igual a M, Λ, ΘK, E. Pero ZΞ también es igual a E, y E a A, B, Γ, Δ y la unidad. Así pues, el total ZH también es igual a los (números) E, ΘK, Λ, M y a los (números) A, B, Γ, Δ y la unidad; y es medido por ellos.

Digo que ZH no será medido por ningún otro fuera de A, B, Γ, Δ, E, ΘK, Λ, M y la unidad. Pues, de ser posible, mida un número O a ZH, y no sea O el mismo que ninguno de los números A, B, Γ, Δ, E, ΘK, Λ, M. Y cuantas veces O mida a ZH, tantas unidades haya en Π; entonces Π, al multiplicar a O, ha hecho ZH. Pero, en efecto, E, al multiplicar a Δ, ha hecho también ZH; entonces, como E es a Π, O es a Δ [VII, 19]. Y puesto que A, B, Γ, Δ son continuamente proporcionales a partir de una unidad, entonces Δ no será medido por ningún otro fuera de A, B, Γ [IX, 13]. Ahora bien, se ha supuesto que O no es el mismo que ninguno de los (números) A, B, Γ; por tanto, O no medirá a Δ. Pero, como O es a Δ, E es a Π; entonces E tampoco mide a Π [VII, Def. 21]. Y E es primo. Pero todo número primo es primo con respecto a todo aquel al que no mide [VII, 29]. Así pues, E, Π son primos entre sí. Pero los primos son también los menores [VII, 21] y los menores miden a los que guardan la misma razón que ellos el mismo número de veces, el antecedente al antecedente y el consecuente al consecuente [VII, 20]; ahora bien, como E es a Π, O es a Δ; entonces, E mide a O el mismo número de veces que Π a Δ. Pero Δ no es medido por ningún otro fuera de A, B, Γ; luego Π es el mismo que uno de los (números) A, B, Γ. Sea el mismo que B y cuantos son B, Γ, Δ en cantidad tómense tantos E, ΘK, Λ a partir de E. Ahora bien, E, ΘK, Λ guardan la misma razón que B, Γ, Δ; entonces, por igualdad, como B es a Δ, E es a Λ [VII, 14]. Luego el (producto) de B, Λ es igual al (producto) de Δ, E [VII, 19]; pero el (producto) de Δ, E es igual al (producto) de Π, O; entonces el (producto) de Π, O es igual al (producto) de B, Λ. Luego como Π es a B, Λ es a O [VII, 19]. Pero Π es el mismo que B; entonces Λ es el mismo que O; lo cual es imposible, porque se ha supuesto que O no era el mismo que ninguno de los (números) puestos, luego ningún número medirá a ZH fuera de A, B, Γ, Δ, E, ΘK, Λ, M y la unidad. Y se ha demostrado que ZH es igual a A, B, Γ, Δ, E, ΘK, M y la unidad. Pero un número perfecto es el que es igual a sus propias partes [VII, Def. 23].

Por consiguiente, ZH es un (número) perfecto. Q. E. D.[100]

100. Si la suma de un número cualquiera de términos de una serie 1, 2, 2^2, ..., 2^{n+1} es un número primo y se multiplica por el último término, el producto será un número perfecto.

Teón de Esmirna y Nicómaco definen el número perfecto y dan la ley para su formación. Por otra parte, Euclides y Teón de Esmirna sólo mencionan los dos primeros números perfectos: $2(2^2 - 1) = 6$ y $2^2(2^3 - 1) = 28$; Nicómaco explicita los dos siguientes: $2^4(2^5 - 1) = 496$ y $2^6(2^7 - 1) = 8.128$; el quinto fue calculado por Jámblico: $2^{12}(2^{13} - 1) = 33.550.336$ (se halla en el ms. Latino Monac. 14.908). Los siguientes se fueron determinando mucho más tarde, a partir del siglo XVI.

LIBRO DÉCIMO

DEFINICIONES

1. Se llaman magnitudes conmensurables aquellas que se miden con la misma medida, e inconmensurables aquellas de las que no es posible que haya una medida común.
2. Las líneas rectas son conmensurables en cuadrado cuando sus cuadrados se miden con la misma área, e inconmensurables cuando no es posible que sus cuadrados tengan un área como medida común.[101]
3. Dados estos supuestos, se demuestra que hay un número infinito de rectas respectivamente conmensurables e inconmensurables, unas sólo en longitud y otras también en cuadrado con una recta determinada. Llámese entonces racionalmente expresable la recta determinada; y las conmensurables con ella, bien en longitud y en cuadrado, bien sólo en cuadrado, racionalmente expresables y las inconmensurables con ella llámense no racionalmente expresables.[102]

101. Traduzco por «conmensurables en cuadrado» la expresión *dynámei sýmmetroi.* El término *dýnamis* corre la misma suerte que otras muchas expresiones matemáticas griegas: además de la riqueza de sentidos con que cuenta en el uso ordinario, adquiere diversos significados específicos en distintos contextos especializados. Su sentido característico en matemáticas suele ser el que corresponde a la operación o resultado de elevar a la segunda potencia, al cuadrado. Este sentido, cuyo paradigma es el cuadrado construido sobre una recta dada, es el pertinente en los *Elementos.* Cuando aquí se habla de magnitudes conmensurables en cuadrado, las razones consideradas median no entre las magnitudes nombradas sino entre las magnitudes que se derivan de ellas por esa operación. Para comparar, *e.g.*, dos líneas «en cuadrado», Euclides considera las razones de los cuadrados construidos sobre las líneas en cuestión.

Por otro lado, según hará notar un porisma de la proposición X, 9 (*infra*), todas las rectas conmensurables en longitud (*mḗkei*) son conmensurables en cuadrado; pero no todas las rectas conmensurables en cuadrado, lo son en longitud. Para señalar este segundo caso, Euclides emplea la expresión «conmensurables sólo en cuadrado (*sýmmetroi dynamei mónon*)». Resultan, en suma, estas relaciones: si las magnitudes consideradas (unas rectas dadas) son conmensurables en longitud, también lo son en cuadrado; por tanto, si son inconmensurables en cuadrado, también lo son en longitud; ahora bien, no valen las respectivas conversas, de modo que pueden ser conmensurables en cuadrado, pero no en longitud, y por ende inconmensurables en longitud, pero no en cuadrado.

102. Las expresiones «racionalmente expresable» y «no racionalmente expresable» traducen respectivamente *rhētós y álogos.* Una versión más literal como «expresable (*rhētós*)» y «sin razón (*álogos*)» no trasluce el papel de estos términos como antónimos en el presente contexto matemático. Por ende parece más indicada una versión del tenor de «con razón expresable» / «sin razón expresable»; las expresiones aquí empleadas son una variante preferible por motivos simplemente estilísticos. Con todo, esta versión es un tanto insólita y desafía los usos y costumbres vigentes en la tradición que los vierte por «racional» e «irracional», sin más. Mi versión responde a estos motivos: (1) Trato de evitar las connotaciones habituales en nuestro par «racional / irracional», que llevan a pensar en números y a dar, subrepticiamente, un sesgo aritmético al libro X. (2) A esta indebida aritmetización se añade la circunstancia de que «racionalmente expresable (*rhētós*)» cobra en Euclides un sentido más amplio que nuestro «racional» y, por correspondencia, el sentido de «no racionalmente expresable (*álogos*)» deviene más restringido que «irracional»: sólo carecen de razón expresable las rectas que resultan inconmensurables tanto en longitud como en cuadrado con una recta designada —implícitamente por lo regular— como referencia o parámetro de «expresabilidad racional». (3) Aunque no han faltado intentos de reducir el complejo libro X a un lenguaje algebraico más familiar, la interpretación más congruente con el planteamiento de los *Elementos* es la que mantiene su carácter irreducIblemente geométrico. Así que tampoco por esta vía reductiva parece aconsejable la versión tradicional: «racional», «irracio-

nal». Sólo cabría, en suma, servirse de estos términos como de una especie de abreviaturas dentro del marco

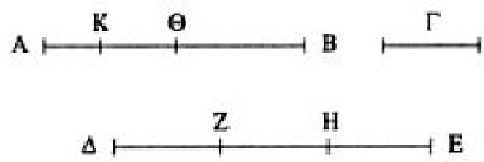
4. Y el cuadrado de la recta determinada (llámese) racionalmente expresable, y los cuadrados conmensurables con éste racionalmente expresables; pero los inconmensurables con él llámense no racionalmente expresables; y las rectas que los producen (llámense) no racionalmente expresables, a saber, si fueran cuadrados, los propios lados y si fueran otras figuras rectilíneas, aquellas (rectas) que construyan cuadrados iguales a ellos.[103]

PROPOSICIÓN 1

Dadas dos magnitudes desiguales, si se quita de la mayor una (magnitud) mayor que su mitad y, de la que queda, una magnitud mayor que su mitad y así sucesivamente, quedará una magnitud que será menor que la magnitud menor dada.

Sean AB, Γ dos magnitudes desiguales de las cuales AB es la mayor.

Digo que, si se quita de AB una (magnitud) mayor que su mitad y de la (magnitud) restante, una (magnitud) mayor que su mitad, y así sucesivamente, quedará una magnitud que será menor que la magnitud Γ.



---

de los supuestos (1)-(3) y sin perder de vista que la matemática griega clásica carece de nuestro concepto de número real, de modo que no comparte nuestro contexto habitual de uso de los términos «racional» e «irracional» en matemáticas.

Este punto guarda relación con el problema general de la interpretación del libro X, que arrastra desde Simon Stevin (1585) el apelativo de «cruz de los matemáticos». Dada la complicada y oscura organización del libro, no faltan propuestas sobre su motivación y su sentido. Por ejemplo, según B. L. VAN DER WAEROEN (*Science Awakening*, Nueva York, 1963, edic. rev.), el libro responde al problema de determinar cuándo la raíz de ciertas líneas irracionales es un irracional del mismo tipo (págs. 168-172), y sigue una línea puramente algebraica de pensamiento (pág. 178). Según I. MUELLER (*Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid's Elements*, Cambridge-Londres, 1981), el libro carece de una motivación intuitiva clara y parece dedicado a elaborar una clasificación de líneas irracionales en respuesta al problema de la construcción del icosaedro en XIII, 16. C. M. TAISBAK (*Coloured Quadrangles. A Guide te the Tenth Book of Euclid's Elements*, Copenhague, 1982), el libro X se centra en el estudio de las relaciones entre los lados y diagonales del decágono, el hexágono y el pentágono regulares con el diámetro del círculo circunscrito, conforme a un determinado patrón de conmensurabilidad/inconmensurabilidad. Esta interpretación es sostenida por D. H. FOWLER (*The Mathematics of Platos Academy*, Oxford, 1987; «An Invitation to Read Book X of Euclid's *Elements*», *Historia Mathematica* 19 (1992), 233-264). En una línea similar se mueve la interpretación de W. R. KNORR («La croix des mathématiciens...», *Bull. Amer. Methem. Society*, 9 (1983), 41-69), aunque tiende a marcar el acento sobre el caso del pentágono regular. En todo caso, creo que la lectura geométrica en la que convienen Taishak, Fowler y Knorr es la que mejor cuadra con el planteamiento del libro y con su lugar de encrucijada en los *Elementos*. Por lo demás, en los trabajos citados hay cuadros y esquemas de las diversas clasificaciones de rectas con o sin razón expresable, que resumen los resultados del libro y que no puedo recoger aquí.

103. Un área resulta «racionalmente expresable» o «no racionalmente expresable» según sea conmensurable o no con el cuadrado de una recta predeterminada como expresable. La misma condición se extiende bien a sus lados, si el área en cuestión es un cuadrado, o bien a los lados de un cuadrado de área igual, si se trata de otra figura.

Vierto *hai dynámenai* como «las rectas que los producen». *Dynaménē* suele traducirse por «raíz cuadrada», pero esta versión incurre en el sesgo aritmético ya denunciado. Así que prefiero mantener la referencia al lado (base) del cuadrado producido.

Pues Γ multiplicada será alguna vez mayor que AB [V Def. 4]. Multiplíquese y sea ΔE un múltiplo de Γ mayor que AB; divídase ΔE en ΔZ, ZH, HE iguales a Γ, y de AB quítese BΘ mayor que su mitad, y de AΘ (quítese) ΘK mayor que su mitad, y así sucesivamente hasta que las divisiones de AB lleguen a ser iguales en número a las divisiones de ΔE.

Sean, pues, AK, KΘ, ΘB divisiones que son iguales en número a las (divisiones) ΔZ, ZH, HE; ahora bien, dado que ΔE es mayor que AB y que de ΔE se ha quitado la (magnitud) EH menor que su mitad y de AB la (magnitud) BΘ mayor que su mitad, entonces la magnitud restante HΔ es mayor que la (magnitud) restante ΘA. Y dado que HΔ es mayor que ΘA y se ha quitado de HΔ su mitad HZ y de ΘA una (magnitud) ΘK mayor que su mitad, entonces la (magnitud) restante ΔZ es mayor que la (magnitud) restante AK. Pero ΔZ es igual a Γ; luego es mayor que AK. Por tanto, AK es menor que Γ.

Por consiguiente, de la magnitud AB queda la magnitud AK que es menor que la magnitud dada Γ. Q. E. D. De manera semejante demostraríamos que (esto ocurre) también si se quita la mitad.[104]

PROPOSICIÓN 2

Si al restar continua y sucesivamente la menor de la mayor de dos magnitudes desiguales, la restante nunca mide a la anterior, las magnitudes serán inconmensurables.

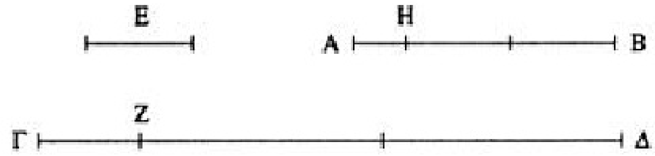
Habiendo, pues, dos magnitudes desiguales AB, ΓΔ y (siendo) AB la menor, al restar sucesivamente la menor de la mayor, no mida nunca la (magnitud) restante a la anterior a ella.

Digo que las magnitudes AB, ΓΔ son inconmensurables.

Pues, si son conmensurables, alguna magnitud las medirá. Mídalas (una magnitud), si es posible, y sea E; y AB, al medir a ZΔ, deje la magnitud ΓZ menor que ella, y ΓZ,

104. Este teorema reviste especial importancia aunque apenas preste servicio hasta las proposiciones del libro XII que emplean el llamado «método de exhausción». Su situación aquí puede justificarse como paso previo a X, 2, donde se muestra el procedimiento para determinar si dos magnitudes son conmensurables o inconmensurables. El relieve de X, 1 descansa en su papel como principio básico del método ya mencionado de «exhausción». Se asemeja a la quinta asunción de Arquímedes en *Sobre la esfera y el cilindro* y recuerda asimismo un lema del propio Arquímedes en *La cuadratura de la parábola*. Reza el lema: «El exceso de la mayor de dos áreas desiguales sobre la menor (es una magnitud que) puede sobrepasar, si es añadida a sí misma (cuantas veces se requiera), cualquier área finita dada». Y a renglón seguido dice Arquímedes que los geómetras anteriores no dejaron de apelar a este lema, pues fue a través de él como establecieron que los círculos guardan entre sí la razón de los cuadrados de sus diámetros (XII 2), las esferas guardan entre sí la razón de los cubos de sus diámetros (XII 18), toda pirámide es equivalente a la tercera parte de un prisma con la misma base y altura (XII 7) y todo cono es equivalente a la tercera parte de un cilindro con la misma base y altura (XII 10) —cf. *La cuadratura de la parábola*, prefacio a Dositeo, edic. CH. MUGLER, París, 1971; t. II, 165.6-18—. Esa referencia al uso anterior del lema halla confirmación en algunas alusiones de ARISTÓTELES en análogo sentido (*Física*, 266b2, 207b10). Todo ello apunta a Eudoxo: es probable que un supuesto similar a X 1 ya hubiera obrado en algunos de esos resultados de Eudoxo recogidos por Euclides en el libro XII. Pero un supuesto *similar* no es el *mismo* supuesto. La asunción y el lema de Arquímedes, a quien suele suponerse más respetuoso con Eudoxo que con el propio Euclides, hacen referencia a la adición, mientras que Euclides se atiene a la sustracción, en la perspectiva del algoritmo antifairético de sustracción recíproca, y prefiere operar —al menos en principio— en términos de bisecciones. Sobre este algoritmo recuér-

dense las proposiciones 2, 3 del libro VIII.



al medir a BH, deje AH menor que ella, y repítase así sucesivamente hasta que quede una magnitud que sea menor que E. Sea así y quede AH menor que E. Así pues, como E mide a AB y AB mide a ΔZ, entonces E también medirá a ZΔ. Pero mide también a la magnitud entera ΓΔ; luego medirá también a la magnitud restante ΓZ. Ahora bien, ΓZ mide a BH; entonces E también mide a BH. Pero mide también a la (magnitud) entera AB; así que medirá también a la (magnitud) restante AH, la mayor a la menor; lo cual es imposible. Luego ninguna magnitud medirá a las magnitudes AB, ΓΔ; por tanto, las magnitudes AB, ΓΔ son inconmensurables [X Def. 1].

Por consiguiente, si de dos magnitudes desiguales..., etc.[105]

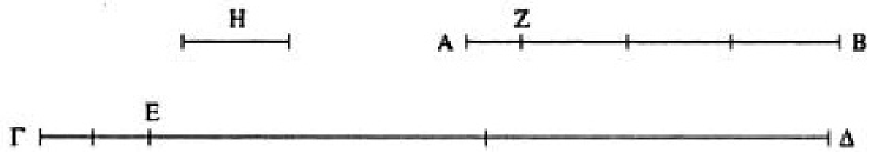
PROPOSICIÓN 3

Dadas dos magnitudes conmensurables, hallar su medida común máxima.

Sean AB, ΓΔ dos magnitudes dadas conmensurables, de las cuales AB sea la menor.

Así pues, hay que hallar la medida común máxima de AB, ΓΔ.

Pues bien, AB o mide a ΓΔ o no la mide. Si, en efecto, la mide y se mide también a sí misma, entonces AB es una medida común de AB, ΓΔ; y está claro que también es la mayor. Porque no medirá a AB ninguna magnitud mayor que AB.



Pero ahora no mida AB a ΓΔ y, al restar continua y sucesivamente la menor de la mayor, la (magnitud) restante medirá alguna vez a la anterior a ella, porque AB, ΓΔ no son inconmensurables [X 2]; y AB, al medir a EΔ, deje la (magnitud) EΓ menor que ella, y EΓ, al medir a ZB, deje la (magnitud) AZ menor que ella y mida AZ a ΓE.

Como, en efecto, AZ mide a ΓE, mientras que ΓE mide a ZB, entonces AZ medirá también a ZB. Pero también se mide a sí misma; luego AZ medirá también a la (magnitud) entera AB. Ahora bien, AB mide a ΔE; entonces AZ medirá también a EΔ. Pero mide también a ΓE; luego mide también a la (magnitud) entera ΓΔ; por tanto, AZ es una medida común de AB, ΓΔ.

105. X 2 muestra uno de los usos más metódicos —digamos— que operativos del procedimiento antifairético, *i.e.*, *su uso* como criterio de conmensurabilidad/inconmensurablidad. Conforme a este criterio, dos magnitudes son conmensurables si y sólo si cabe determinar efectivamente, por el procedimiento antifairético, la existencia de medida común. Por ende, siempre que la serie de sustracciones recíprocas proceda indefinidamente sin llegar a un resultado efectivo, tendremos una señal de que las magnitudes en cuestión son inconmensurables. En otras palabras, la efectividad o la no efectividad del algoritmo antifairético es una con-

dición que determina respectivamente la conmensurabilidad o la inconmensurabilidad.

Digo ahora que también es la mayor. Pues, si no, habrá una magnitud mayor que AZ que medirá a AB, ΓΔ. Sea H. Así pues, dado que H mide a AB, mientras que AB mide a EΔ, entonces H medirá a EΔ. Pero mide también a la (magnitud) entera ΓΔ; luego H medirá también a la (magnitud) restante ΓE. Pero ΓE mide a ZB; luego H medirá también a ZB. Pero también mide a la (magnitud) entera AB y medirá también a la (magnitud) restante AZ, la mayor a la menor; lo cual es imposible. Luego ninguna magnitud mayor que AZ medirá a AB, ΓΔ, por tanto AZ es la medida común máxima de AB, ΓΔ.

Por consiguiente, se ha hallado la medida común máxima, AZ, de las dos magnitudes dadas AB, ΓΔ. Q. E. D.

Porisma:

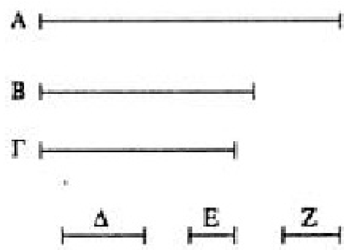
A partir de esto queda claro que, si una magnitud mide a dos magnitudes, medirá también a su medida común máxima.[106]

PROPOSICIÓN 4

Dadas tres magnitudes conmensurables, hallar su medida común máxima.

Sean A, B, Γ las tres magnitudes conmensurables dadas. Así pues, hay que hallar la medida común máxima de A, B, Γ.

Tómese, pues, la medida común máxima de A, B y sea Δ [X 3]. Pues bien, o Δ mide a Γ o no la mide. En primer lugar, mídala. Así pues Δ mide a Γ, y mide también a A, B, entonces Δ mide a A, B, Γ; por tanto Δ es una medida común de A, B, Γ. Y está claro que también la mayor, porque una magnitud mayor que la magnitud Δ no mide a A, B.



No mida ahora Δ a Γ.

Digo en primer lugar que Γ, Δ son conmensurables.

Porque como A, B, Γ son conmensurables, las medirá alguna magnitud que evidentemente medirá también a A, B; de modo que la medida común máxima de A, B medirá también a Δ. Y mide también a Γ; de modo que la antedicha magnitud medirá también a o, la medida común máxima de A, B [X 3 Por.], luego Γ, Δ son conmensurables.

Pues bien, tómese su medida común máxima y sea E [X 3]. Así pues, dado que E mide a Δ, mientras que Δ mide a A, B, entonces E medirá también a A, B. Pero mide también a Γ. Luego E mide a A, B, Γ; por tanto E es una medida común de A, B, Γ.

Digo ahora que también la mayor.

Pues, si es posible, sea Z una magnitud mayor que E y mida a A, B, Γ. Ahora bien, puesto que Z mide a A, B, Γ, entonces medirá también a A, B y a la medida común máxima de A, B [X 3 Por.]. Pero la medida común máxima de A, B es Δ; entonces Z mide a Δ. Pero mide también a Γ; luego Z mide a Δ. Y mide también a Γ. Por tanto Z mide a Γ, Δ; entonces Z medirá también a la medida común máxima de Γ, Δ [X 3 Por.]. Pero es E; luego Z medirá a E, la mayor a la menor; lo cual es imposible. Por tanto, ninguna

106. X 3 aplica a las magnitudes el procedimiento empleado en VII 2 para los números. Sobre la proyección histórica y las modernas aplicaciones de éste algoritmo euclídeo, cf. J. L. CHABERT *et alii*, *Histoire*

d'algorithmes, Paris, 1993; cap. 4, págs. 129-158.

(magnitud) mayor que la magnitud E mide a A, B, Γ; luego la medida común máxima de A, B, Γ es E, si Δ no mide a Γ, y si la mide, es la propia (magnitud) Δ.

Por consiguiente, se ha hallado la medida común máxima de las tres magnitudes conmensurables dadas.

Porisma:

A partir de esto queda claro que, si una magnitud mide a tres magnitudes, medirá también a su medida común máxima.

De manera semejante se hallará la medida común máxima de más magnitudes y se extenderá el porisma. Q. E. D.[107]

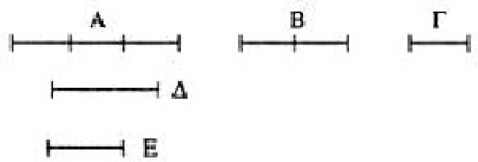
PROPOSICIÓN 5

Las magnitudes conmensurables guardan entre sí la misma razón que un número guarda con un número.

Sean A, B magnitudes conmensurables.

Digo que A guarda con B la misma razón que un número con un número.

Pues, como A, B son conmensurables, alguna magnitud las medirá. Mídalas una magnitud y sea Γ. Y cuantas veces Γ mida a A, tantas unidades haya en Δ, y cuantas veces Γ mida a B, tantas unidades haya en E.



Así pues, dado que Γ mide a A según las unidades de Δ y la unidad mide a Δ según sus unidades, entonces la unidad mide al número Δ el mismo número de veces que la magnitud Γ a la (magnitud) A; luego, como Γ es a A, así la unidad es a Δ [VII Def. 20]; entonces, por inversión, como A es a Γ, así Δ a la unidad [V 7 Por.]. Como Γ mide a su vez a Δ según las unidades de E, mientras que la unidad mide también a E según sus unidades, entonces la unidad mide a E el mismo número de veces que Γ a B. Luego, como Γ es a B, así la unidad es al (número) E. Pero se ha demostrado que también como A es a Γ, Δ es a la unidad. Luego, por igualdad, como A es a B, así el número A es al (número) E [V 22].

Por consiguiente, las magnitudes conmensurables A, B guardan entre sí la misma razón que el número A con el número E. Q. E. D.[108]

107. Esta proposición, al igual que la anterior con VII 2, coincide literalmente con VII 3, sustituyendo número por magnitud.

108. La prueba descansa, en parte, sobre la noción de proporción prevista para los números y en el supuesto tácito de que los términos que sean proporcionales en el sentido de la def. 20 del libro VII, también lo serán en el sentido generalizado de la def. 5 del libro V. Euclides, después de dar dos caracterizaciones autónomas y separadas de la proporcionalidad, una para las magnitudes en el libro V y otra para los números en el libro VII, viene a suponer que las segundas pueden considerarse un caso particular de las primeras. De una relación similar entre magnitudes y números ya se había hecho eco ARISTÓTELES (*Analíticos Segundos*, 74a17, 75b4-5). Pero esta correspondencia entre las magnitudes conmensurables y los números no deja de resultar ahora un tanto inesperada. Se ha llegado a decir que la falta de una correlación expresa entre unas y otros, antes del libro X, constituye probablemente la mayor laguna de los *Elementos* en cuestión de fundamentos (I. MUELLER, *op. cit.*, pág. 138). SIMSON, por su parte, procura establecer esa correspondencia a partir de una

([illegible], op. cit., pág. [illegible]). Simson, por su parte, procura establecer esa correspondencia a partir de una proposición C intercalada en el libro V (*vid.* edic. cit., págs. 122 y 313-314).

PROPOSICIÓN 6

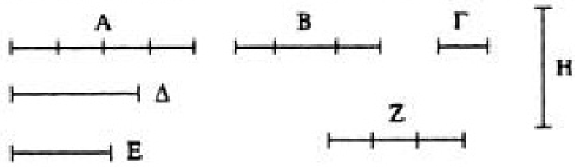
Si dos magnitudes guardan entre sí la razón que un número (guarda) con un número, las magnitudes serán conmensurables.

Guarden, pues, las dos magnitudes A, B entre sí la razón que el número Δ (guarda) con el número E.

Digo que las magnitudes A, B son conmensurables.

Pues divídase A en tantas (magnitudes) iguales como unidades hay en Δ, y sea Γ igual a una de ellas; y compóngase Z de tantas unidades iguales a Γ como unidades hay en E.

Así pues, dado que, cuantas unidades hay en Δ, tantas magnitudes iguales a Γ hay en A, entonces, la parte que la unidad es de Δ, la misma parte es también Γ de A; luego, como Γ es a A, así la unidad es a Δ [VII Def. 20]. Pero la unidad mide al número Δ; entonces también Γ mide a A. Ahora bien, dado que, como Γ es a A, así la unidad es al (número) Δ, entonces, por inversión, como A es a Γ, así el número Δ es a la unidad [V 7 Por.]. Y puesto que, cuantas unidades hay en E, tantas hay a su vez en Z iguales a Γ, entonces como Γ es a Z, así la unidad es al (número) E [VII Def. 20]. Pero se ha demostrado que también como A es a Γ, así Δ la unidad; entonces, por igualdad, como A es a Z, así Δ a E [V 22]; ahora bien, como Δ es a E, así A a B; entonces, como A es a B, así también a Z [V 11]. Luego A guarda la misma razón con cada una de las (magnitudes) B, Z; por tanto, B es igual a Z [V 9]. Pero Γ mide a Z; luego mide también a B. Pero también a A; luego Γ mide a A, B. Por tanto, A es conmensurable con B.



Por consiguiente, si dos magnitudes guardan entre sí..., etc.

Porisma:

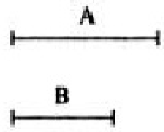
A partir de esto queda claro que, si hay dos números, como Δ, E, y una recta, como A, es posible hacer una recta [Z], que sea a la recta como el número Δ es al número E. Pero, si se toma una media proporcional de A, Z, como B, como A es a Z, así el cuadrado de A será al cuadrado de B, es decir que como la primera es a la tercera, así la (figura) construida sobre la primera es a la figura semejante y construida de manera semejante sobre la segunda [VI 19 Por.]. Pero como A es a Z, así el número Δ es al número E; entonces como el número Δ es al número E, así también la figura construida sobre la recta A[109] a la figura construida sobre la recta B. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 7

Las magnitudes inconmensurables no guardan entre sí la razón que un número guarda con un número.

Sean A, B, magnitudes inconmensurables.

109. *Tò apò tês A eutheías*, «la (figura construida) sobre la recta A».



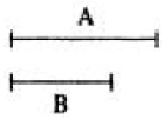
Digo que A no guarda con B la razón que un número guarda con un número.

Pues, si A guarda con B la razón que un número guarda con un número, A será conmensurable con B [X 6]. Pero no lo es; por tanto, A no guarda con B la razón que un número guarda con un número.

Por consiguiente, las magnitudes inconmensurables no guardan entre sí la razón..., etc.

PROPOSICIÓN 8

Si dos magnitudes no guardan entre sí la razón que un número guarda con un número, las magnitudes serán inconmensurables.



No guarden, pues, entre sí las dos magnitudes A, B la razón que un número guarda con un número.

Digo que las magnitudes A, B son inconmensurables.

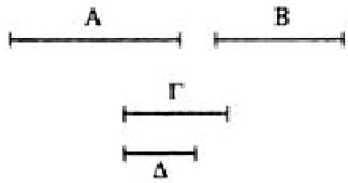
Pues, si son conmensurables, A guardará con B la razón que un número guarda con un número [X 5]. Pero no la guarda; por tanto, las magnitudes A, B son inconmensurables.

Por consiguiente, si dos magnitudes guardan entre sí..., etc.

PROPOSICIÓN 9

Los cuadrados de rectas conmensurables en longitud guardan entre sí la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; y los cuadrados que guardan entre sí la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado tendrán también los lados conmensurables en longitud. Pero los cuadrados de las rectas inconmensurables en longitud no guardan con un entre sí la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, y los cuadrados que no guardan entre sí la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado tampoco tendrán los lados conmensurables en longitud.

Sean, pues, A, B conmensurables en longitud.



Digo que el cuadrado de A guarda con el cuadrado de B la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado.

Pues como A es conmensurable en longitud con B, entonces A guarda con B la razón que un número guarda con un número [X 5]. Guarde la razón de Γ a Δ. Pues bien, dado que, como A es a B, así Γ a Δ, mientras que el cuadrado de A guarda con el cuadrado de B una razón duplicada de la que A guarda con B, porque las figuras semejantes guardan una razón duplicada de la de sus lados correspondientes [VI 20 Por.]; y dado que el cuadrado de Γ guarda con el cuadrado de Δ una razón duplicada de la que Γ guarda con Δ, porque entre dos números cuadrados hay un número que es media proporcional, y el número cuadrado guarda con el número cuadrado una razón duplicada de la que el lado guarda con el lado [VIII 11]; luego como el cuadrado de A es al cuadrado de B, así el cuadrado de Γ es al cuadrado de Δ.

Pero ahora, como el cuadrado de A es al cuadrado de B, sea así el cuadrado de Γ al cuadrado de Δ.

Digo que A es conmensurable en longitud con B.

Pues, dado que, como el cuadrado de A es al cuadrado de B, así el cuadrado de Γ al de Δ, mientras que el cuadrado de A guarda con el cuadrado de B una razón duplicada de la que A guarda con B, y el cuadrado de Γ guarda con el cuadrado de Δ una razón duplicada de la que Γ guarda con Δ, entonces, como A es a B, así Γ a Δ. Luego A guarda con B la razón que el número Γ guarda con el número Δ. Por tanto A es conmensurable en longitud con B [X 6].

Sea ahora A inconmensurable en longitud con B.

Digo que el cuadrado de A no guarda con el de B la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado.

Pues si el cuadrado de A guarda con el de B la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, A será conmensurable con B. Pero no lo es; luego el cuadrado de A no guarda con el cuadrado de B la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado.

No guarde ahora el cuadrado de A con el cuadrado de B la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado.

Digo que A es inconmensurable en longitud con B.

Pues si A es conmensurable con B, el cuadrado de A guardará con el cuadrado de B la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, pero no la guarda; luego A no es conmensurable en longitud con B.

Por consiguiente, los cuadrados de (rectas) conmensurables en longitud, etc.[110]

Porisma:

Y a partir de lo demostrado quedará claro que las rectas conmensurables en longitud también lo son siempre en cuadrado, mientras que las conmensurables en cuadrado no lo son siempre en longitud.[111]

LEMA

Se ha demostrado en los libros de aritmética que los números planos semejantes guardan entre sí la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado [VIII 26], y que si dos números guardan entre sí la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, son números planos semejantes [VIII 26 conversa]. Y es evidente a partir de esto que los números planos no semejantes, es decir los que no tienen los lados proporcionales, no guardan entre sí la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; pues, si la guardan, serán planos semejantes; lo cual precisamente se ha supuesto que no; luego los números planos no semejantes no guardan entre sí la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado.[112]

110. Un escolio a esta proposición (*Schol.* X, núm. 26) afirma que este teorema fue descubierto por Teeteto.

111. Heiberg atetiza cuatro párrafos situados a continuación del porisma por considerarlos superfluos e impropios del proceder habitual de Euclides. Un resumen del contenido de estos párrafos, no incluidos en el presente texto, puede ser el siguiente:

Tras una especie de prueba o explicación del porisma, se establece y explica que las rectas inconmensurables en longitud no son necesariamente inconmensurables también en cuadrado y que, sin embargo, aquellas rectas que son inconmensurables en cuadrado son siempre inconmensurables en longitud.

112. Lema sospechoso. HEATH lo atetiza (*ed. cit.*, III, pág. 30). Sin embargo Heiberg lo mantiene pese a

sus reservas, algunas de las cuales hacen referencia a la proposición siguiente.

Arquímedes

(287-212 a.C.)

VIDA Y OBRA

La estampa que hoy caracteriza a Arquímedes es su salto de la bañera para correr desnudo por las calles gritando ¡*Heureka*! ¡*Heureka*! («¡Lo encontré! ¡Lo encontré!») porque acababa de descubrir cómo distinguir una corona de oro de otra de falso metal. Menos conocido es su propio plan para identificar al mejor matemático de la Antigüedad, es decir, a sí mismo, entre los demás impostores. En la antigua Grecia era común que los matemáticos anunciaran sus nuevos teoremas sin ni siquiera acompañarlos de pruebas. Cuando Arquímedes se dio cuenta de que otros proclamaban sus resultados como propios, comenzó a insertar entre sus enunciados dos o tres proposiciones falsas. Así, cuando los impostores anunciaban alguno de sus falsos descubrimientos, Arquímedes podía ponerles en evidencia exponiendo públicamente sus errores.

Poco sabemos de la vida de Arquímedes. Según el general romano Marcelo, murió en el año 212 a.C. durante la Segunda Guerra Púnica a manos de uno de los soldados romanos. La tradición dice, además, que estaba trabajando en la geometría cuando la muerte le alcanzó, después de 75 años de vida, lo cual situaría su nacimiento en el 287 a.C. El padre de Arquímedes fue un astrónomo llamado Fidias, quien vivió y murió en la ciudad griega de Siracusa, en la isla de Sicilia. Se dice que su familia pudo haber estado emparentada con la casa real de Siracusa. De hecho, Arquímedes mantenía una relación muy próxima con el rey Hierón II.

Aunque, como en el caso de Euclides, carecemos de bastante información biográfica, la comparación entre uno y otro autor finaliza aquí. Mientras que al primero se le considera un gran recopilador —que apenas hubiera podido alcanzar resultados por sí mismo—, Arquímedes fue un hombre en muchos siglos avanzado a su tiempo, tanto como matemático cuanto como ingeniero. De hecho, nuestro autor era sobre todo conocido en la Antigua Grecia por sus logros en ingeniería para la casa real de Siracusa.

En cierta ocasión el rey Hierón le retó a mover un gran peso con una fuerza pequeña.

Entonces Arquímedes concibió la idea de la polea compuesta y mostró cómo podía (fácilmente) arrastrar a la costa un barco de tres mástiles que 100 hombres apenas podían mover con dificultad. Según Plutarco, fue esta historia la que originó que Arquímedes pronunciara una de sus más famosas sentencias: «dadme un punto de apoyo y moveré el mundo».

Plutarco y otros historiadores de la Antigüedad, como Polibio y Livio, describen como simplemente fantásticos sus inventos balísticos desarrollados para la defensa de Siracusa contra el ejército romano que guiaba el general Marcelo. Dice Plutarco:

> ... cuando Arquímedes comenzó a emplear sus ingenios, disparó inmediatamente contra las fuerzas de tierra toda suerte de proyectiles, e inmensas masas de piedra cayeron con increíble ruido y violencia; contra lo cual ningún hombre pudo ofrecer resistencia, porque derribaban a todos aquellos sobre quienes caían, a montones, rompiendo todas sus filas y destrozando sus estrategias. Mientras tanto grandes postes empujaban desde las murallas los barcos y hundieron algunos mediante grandes pesos que dejaban caer desde encima de los mismos; otros los levantaban en el aire con una mano de hierro o un pico de ave como un pico de grulla y, cuando los habían colgado por la proa, y puesto de punta sobre la popa, los hundían hasta el fondo del mar; o bien los barcos, colgados por los ingenios de dentro, y hechos girar violentamente, eran arrojados contra las afiladas rocas que sobresalían de las murallas, con gran destrucción de los soldados que estaban a bordo de ellas. Un barco era frecuentemente levantado a gran altura en el aire (algo horrible de contemplar), y era sacudido de acá para allá, y se mantenía meciéndose, hasta que los marineros eran todos arrojados, cuando era arrojado en toda su longitud contra las rocas o dejado caer.

Arquímedes podía, además, sumergirse completamente en un problema y permanecer aislado de lo que le rodeaba, tal y como Plutarco atestigua de nuevo:

> A menudo los criados de Arquímedes le llevaban a los baños contra su voluntad, para lavarle y ungirle, y aun estando allí, siempre estaba dibujando figuras geométricas, incluso en las mismas cenizas de la chimenea. Y mientras lo estaban ungiendo con aceites y dulces perfumes, con sus dedos dibujaba líneas sobre su cuerpo desnudo, hasta tal punto estaba fuera de sí, y llevado a un éxtasis o trance, con el deleite que tenía en el estudio de la geometría.

Su costumbre de abstraerse de lo que le rodeaba llegó a costarle la vida. Sus logros construyendo ingenios bélicos le convirtieron en el primer objetivo de la armada romana que invadió Sicilia durante la Segunda Guerra Púnica. La leyenda cuenta que un soldado romano encontró a Arquímedes dibujando unas figuras en la arena. El soldado entonces le ordenó que detuviera aquello que estuviera haciendo y que le acompañara inmediatamente, a lo que Arquímedes contestó que no podía, que necesitaba más tiempo para resolver el problema que tenía en la cabeza. Enfurecido, el soldado borró las figuras de la arena y ¡le atravesó con su espada!

Los trabajos matemáticos de Arquímedes se dividen en tres grupos:

1. Los relacionados con las áreas y sólidos circunscritos por curvas y superficies. Éstos incluyen *Sobre la esfera y el cilindro*, *Medida del círculo*, y el *Método*.

2. Los que analizan geométricamente problemas sobre hidrostática y estática.

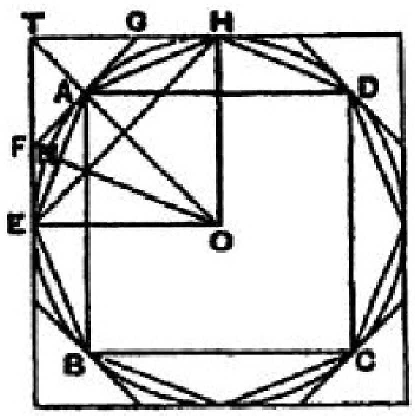
3. Obras misceláneas, especialmente las que enfatizan el hecho de contar, como por ejemplo *El arenario*.

El presente volumen incluye *Sobre la esfera y el cilindro*, *Medida del círculo*, *El* *arenario* y el *Método*.

La versión de *Medida del círculo* conocida por nosotros no es un buen paradigma del trabajo de Arquímedes. Contiene sólo tres proposiciones, y la segunda, que compara el área de un círculo con el cuadrado dado por su diámetro, depende de la tercera proposición, la cual afirma que la razón entre la circunferencia del círculo y su diámetro es mayor que 3 1/7, pero menor que 3 10/71, una excelente acotación del número π.

La primera proposición es sin duda la de mayor interés para nosotros. Afirma que el área de un círculo es igual al área de un triángulo rectángulo con un cateto igual al radio del círculo, y el otro es igual a su circunferencia. Obsérvese la interesante manera en que el enunciado de Arquímedes iguala el área encerrada por una curva (el círculo), con el área englobada por líneas rectas (los catetos de un triángulo rectángulo). Hoy en día, expresamos el área de un círculo como πr^2, mientras la relación de Arquímedes, utilizando la notación moderna, se expresaría como $1/2\ (2\pi r)\ r$.

Para demostrar teoremas sobre el área o el volumen de una figura limitada por curvas o superficies, Arquímedes empleaba el llamado «método de exhaución», al que también se hace referencia como «método indirecto de prueba, que evita el empleo de límites», según reza el lema arquimediano epónimo. El lema enuncia que «dadas dos diferentes líneas, superficies o sólidos, el mayor excede al menor por una cantidad tal que, añadida a sí misma, puede exceder una magnitud asignada del tipo de magnitud comparada con la otra». Por lo general, en las demostraciones basadas en el ya mencionado *reductio ad absurdum* Arquímedes utilizaba herramientas de este tipo:



Arquímedes empieza su demostración reconociendo que si el círculo ABCD no es igual al triángulo rectángulo K, entonces debe ser mayor o menor que K. La primera parte de la demostración supone que el área del círculo es mayor que el área del triángulo rectángulo K. Inicia su prueba inscribiendo el cuadrado ABCD dentro del círculo. Continúa seccionando los arcos AB, BC, CD y DA, y sigue partiendo estas mitades una y otra vez en más mitades hasta que los lados del polígono inscrito cuyos vértices son los puntos de la infinita bisección están tan cerca del círculo que el área comprendida entre éste y el polígono inscrito es menor que la supuesta diferencia entre las áreas del círculo y del triángulo K. De este modo, razona, el área del polígono inscrito debe ser mayor que el área de K.

En la segunda parte de la prueba, Arquímedes considera la perpendicular ON del centro del círculo O al lado AE. Dado que AE es parte del polígono inscrito dentro del círculo, el segmento ON debe ser menor que el radio del círculo, y el perímetro del polígono debe ser menor que la circunferencia del círculo, el otro lado del triángulo rectángulo K. Por tanto, el área del polígono inscrito debe ser menor que el área del triángulo K. Contrariamente a lo que se acababa de demostrar en la primera parte, la segunda parte demuestra que el área del círculo no puede ser menor que el área de K.

Muchos de los teoremas demostrados por Arquímedes habían sido enunciados y probados erróneamente con anterioridad. Junto a éstos, sin embargo, también dio con muchos resultados totalmente novedosos.

El *Método* nos ofrece una muestra de cómo Arquímedes descubrió nuevos teoremas. En el prefacio de *Sobre la esfera y el cilindro*, Arquímedes escribió:

> Como después se me ocurrieron teoremas dignos de mención, me he estado ocupando en sus demostraciones. Y son éstos: primero, que la superficie de toda esfera es el cuádruple del círculo máximo de los que hay en ella [...] Estas propiedades de las figuras mencionadas existían desde antes en la naturaleza, pero eran desconocidas por quienes se dedicaron a la geometría antes que nosotros [...] Por ello yo no dudaría en comparar estas proposiciones con las estudiadas por otros geómetras y entre ellas, con las de Eudoxo relativas a los cuerpos sólidos, que parecen tan sobresalientes: la de que toda pirámide es un tercio del prisma que tiene la misma base que la pirámide e igual altura, y que todo cono es la tercera parte del cilindro que tiene la misma base que el cono e igual altura. Aunque por naturaleza estas figuras tenían desde antes estas propiedades y aunque habían existido antes de Eudoxo muchos geómetras dignos de mención, ocurrió que fueron ignoradas por todos y que ninguno cayó en la cuenta. [Ahora, sin embargo] quienes estén capacitados podrán examinarlas.

El *Método* contiene la historia más interesante de toda la obra de Arquímedes. Durante mucho tiempo, el ensayo sólo era conocido por una oscura referencia recogida en la enciclopedia alfabética bizantina del siglo X conocida con el nombre de Suidas. Ahí aparece mencionado un comentario a la obra de Arquímedes escrito por Teodosio de Bitinia en el siglo II a.C. En general, los matemáticos temían que la publicación de sus resultados ayudara a encontrar un método universal que los privara de éxito. De hecho, Descartes sospechaba que Arquímedes había escondido el *Método* para que nadie pudiera beneficiarse de él. Por fin, en 1899, el griego Papadopoulos Kerameus descubrió un palimpsesto[1] en la biblioteca de Estambul y consiguió leer algunas de las líneas del texto antiguo que se escondían bajo el nuevo. Tras esas pocas líneas, el filólogo clásico danés Johan Ludvig Heiberg reconoció rasgos de estilo arquimedianos, y sospechó que el manuscrito podía esconder un trabajo de nuestro matemático. Cuando por fin pudo examinar el palimpsesto, Heiberg debió de alucinar: Kerameus había hallado el tratado largo tiempo perdido, el *Método*, que comienza diciendo, «Arquímedes saluda a Eratóstenes». La presencia de otros trabajos arquimedianos en el mismo códice palimpsesto ayudó a confirmar la autoría.

El primer texto del manuscrito Kerameus-Heiberg fue copiado en el siglo X. Más adelante, en el siglo XIII, un monje habría intentado borrar la tinta original para copiar

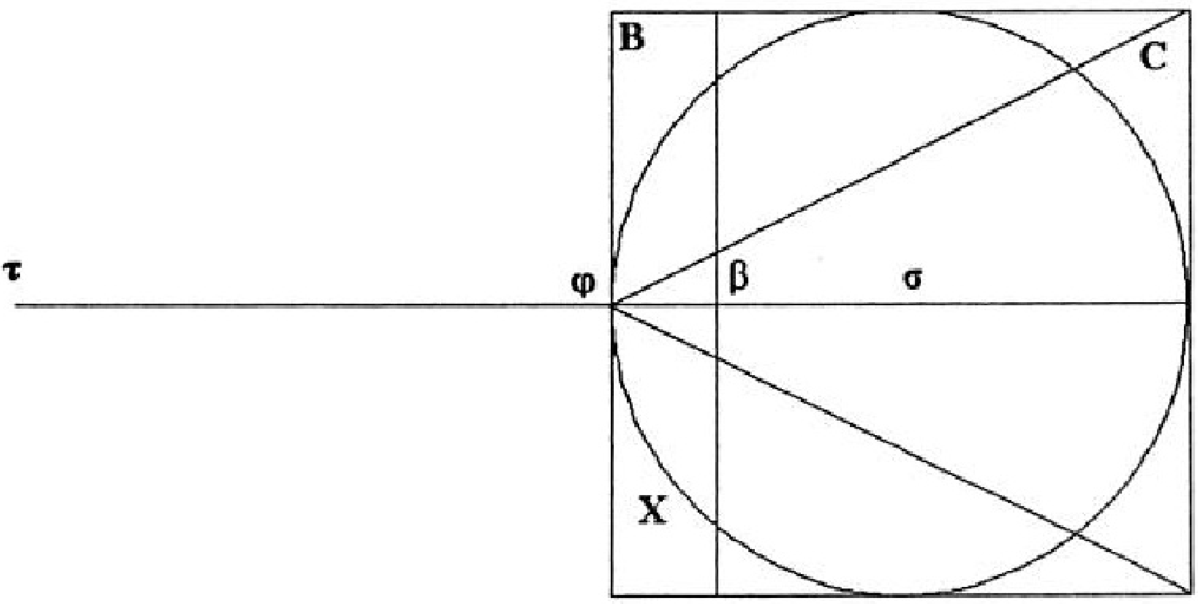
1. Un palimpsesto es un documento cuyo contenido original ha sido raspado para escribir de nuevo encima.

encima un libro de salmos. El monje no debía de tener ni idea de lo que estaba borrando. Ni tampoco imaginaba el valor que llegaría a adquirir su copia: en 1998 la casa de subastas Christies lo vendió ¡por dos millones de dólares!

La técnica de Arquímedes en el *Método* asume que los sólidos están compuestos por elementos planos de densidad uniforme. El volumen de un cuerpo X se puede calcular situándolo en el mismo eje, bien con una sola figura B, bien con dos figuras B y C. Arquímedes supone entonces que todas las figuras están cortadas por planos paralelos, todos perpendiculares al eje anterior. Las figuras B y C se escogen de tal modo que:

1. Sus centros de gravedad y los centros de gravedad de sus elementos planos comparten el eje escogido.
2. Sabemos el valor de sus volúmenes.
3. Los elementos planos de B pueden ser comparados a los elementos planos de X (si es posible también con los elementos planos de C).

El último requisito necesita, pues, que el investigador descubra dos figuras B y C idóneas para calcular el volumen de X. Una vez que Arquímedes establecía la relación entre los correspondientes elementos planos, quedaba configurado un eje hasta el punto τ tal que la longitud $\tau\phi$ resultara apropiada al problema, otra demanda para la capacidad del investigador, que además actuará como palanca sobre el punto de apoyo ϕ.



Para cada elemento plano x de X (así como c de C, si ésta fuera necesaria para resolver el problema), Arquímedes sitúa el correspondiente elemento y de igual área, y con centro de gravedad en τ, tal que y actuando sobre τ equilibre la correspondiente fuerza del elemento b actuando sobre la posición de (β); esto es $y : b = \phi\beta : \phi\tau$. Para el siguiente paso, Arquímedes recompone la figura Y formada por los elementos planos y. Su volumen resulta igual al volumen de X (o X más C, si esta hubiera sido necesaria). Si Y ha sido formado por un sólido de densidad uniforme, Arquímedes llegaba a la conclusión de que su centro de gravedad reside, pues, en τ. Dado que todas las partes en τ equilibran las partes de B actuando sobre β, la totalidad de Y sobre τ queda equilibrada por la totalidad de B sobre su propio centro de gravedad σ. Sin embargo, B ha sido escogido tal que tanto su volumen (y su peso) como su centro de gravedad (en el eje) sean conocidos. En consecuencia, Arquímedes determinaba el volumen de la figura Y de la ecuación $Y:B = \phi\sigma:\phi\tau$, a partir de la cual se concluye que $X = Y$ (o bien $X = Y - C$).

El título completo de esta obra, *Método de Arquímedes sobre los teoremas mecánicos*, subraya la visión de Arquímedes de que las demostraciones en su trabajo no podían ser calificadas como demostraciones rigurosamente *matemáticas*. Las demostraciones en el *Método* dependen de suposiciones físicas sobre las figuras usadas en ellas y en el principio de la palanca, un principio puramente mecánico.

Así que, dada la palanca apropiada, Arquímedes no sólo podía mover la Tierra, también podría haber descubierto nuevas verdades matemáticas.

SOBRE LA ESFERA Y EL CILINDRO

LIBRO I

Arquímedes a Dosíteo, ¡salud!

De las proposiciones que había estudiado redacté y te envié antes con su demostración la de que todo segmento comprendido por una recta y una parábola es cuatro tercios del triángulo que tiene la misma base y la misma altura que el segmento.[1]

Como después se me ocurrieron teoremas dignos de mención, me he estado ocupando en sus demostraciones. Y son éstos: primero, que la superficie de toda esfera es el cuádruple del círculo máximo de los que hay en ella;[2] luego, que la superficie de todo casquete esférico es igual a la del círculo cuyo radio es igual a la recta trazada desde el vértice del casquete a la circunferencia del círculo que sirve de base al casquete;[3] además de éstos, que en toda esfera, el cilindro que tiene su base igual al círculo máximo de los de la esfera y una altura igual al diámetro de la esfera, es él mismo una vez y media la esfera y su superficie una vez y media la de la esfera.[4]

Estas propiedades de las figuras mencionadas existían desde antes en la naturaleza, pero eran desconocidas por quienes se dedicaron a la geometría antes que nosotros, porque a ninguno se le ocurrió que hubiera una conmensurabilidad entre estas figuras. Por ello yo no dudaría en comparar estas proposiciones con las estudiadas por otros geómetras y entre ellas, con las de Eudoxo relativas a los cuerpos sólidos, que parecen tan sobresalientes: la de que toda pirámide es un tercio del prisma que tiene la misma base que la pirámide e igual altura, y que todo cono es la tercera parte del cilindro que tiene la misma base que el cono e igual altura.[5] Aunque por naturaleza estas figuras te-

1. *Mét.* 1 y *Cuadr. Parab.* 17: «Todo segmento comprendido por una recta y una parábola es cuatro tercios del triángulo que tiene por base la misma que el segmento e igual altura».

2. *Esf. cil.* I 30: «La superficie de una figura circunscrita en torno a la esfera es mayor que el cuádruple del círculo máximo de los de la esfera».

3. *Mét.* 7 y *Esf. cil.* I 40: «La superficie de la figura circunscrita en torno a un casquete es mayor que la del círculo cuyo radio es igual a la recta trazada desde el vértice del casquete hasta la circunferencia del círculo que sirve de base al casquete».

4. *Mét.* 2 y *Esf. cil.* I 34, corol.: «Todo cilindro que tiene por base un círculo máximo de los de la esfera y la altura igual al diámetro de la esfera es una vez y media la esfera y su superficie, incluidas las bases, es una vez y media la superficie de la esfera».

5. No se nos conservan los textos correspondientes de Eudoxo, pero los enunciados y sus demostraciones fueron recogidos por EUCLIDES, respectivamente en *Elementos* XII 7, corolario: «Toda pirámide es la tercera parte del prisma que tiene la misma base que ella e igual altura» y *Elementos* XII 10: «Todo cono es la tercera parte del cilindro que tiene la misma base que él e igual altura».

nían desde antes estas propiedades y aunque habían existido antes de Eudoxo muchos geómetras dignos de mención, ocurrió que fueron ignoradas por todos y que ninguno cayó en la cuenta. Quienes estén capacitados podrán examinarlas. Hubiera yo debido publicarlas en vida de Conón, pues le consideraba especialmente capaz de meditar sobre ellas y emitir un juicio adecuado; considerando que es conveniente comunicarlas a los familiarizados con las matemáticas, he redactado para enviártelas las demostraciones sobre las que podrán investigar quienes se dedican a las matemáticas.

Que sigas bien.

Van primero las definiciones y postulados para las demostraciones.

DEFINICIONES

1. En el plano hay algunas líneas curvas finitas que o bien están enteras por el mismo lado de las rectas que unen sus extremos o bien no tienen ningún punto por el otro lado.
2. Llamo cóncava por el mismo lado a una línea tal que si en ella tomamos dos puntos cualesquiera, las rectas entre esos puntos o bien caen enteras hacia el mismo lado de la línea o bien una parte hacia el mismo lado y otra sobre la propia línea, pero ninguna hacia el otro lado.
3. Igualmente existen también superficies finitas que no están situadas ellas mismas en un plano, pero tienen sus extremos en un plano, las cuales estarán o bien enteras hacia el mismo lado del plano en el que tienen sus extremos o bien no tendrán ninguna parte hacia el otro lado.
4. Y llamo cóncavas hacia el mismo lado a superficies tales que, si se toman dos puntos en ellas, las rectas entre esos puntos caen o bien enteras hacia el mismo lado de la superficie o bien una parte hacia el mismo lado y otra sobre la propia superficie, pero ninguna hacia el otro lado.
5. Cuando un cono que tiene su vértice en el centro de una esfera corta a la esfera, llamo sector sólido a la figura comprendida por la superficie del cono y la superficie de la esfera en el interior del cono.
6. Cuando dos conos que tienen la misma base tengan los vértices cada uno a un lado del plano de la base de manera que sus ejes estén situados en línea recta, llamo rombo sólido a la figura sólida compuesta por ambos conos.

POSTULADOS

Postulo lo siguiente:

1. De las líneas que tienen los mismos extremos la recta es la más corta.[6]

6. Aunque matemáticos de la talla de Proclo, seguidos de autores como Heath (*The Works of Archimedes*, Nueva York, Dover, 2002, 3) y una larga tradición matemática (presente en los libros de texto hasta hace bien poco) han considerado la presente una «definición», no debemos dejar de hacer notar que el texto griego parece indicar que Arquímedes lo presenta como un postulado, ya que el verbo que introduce la frase es *lambánō* («asumo»). La presencia del subtítulo «postulados» es argumento de menos peso, puesto que tal subtítulo, así como la numeración de los «postulados», no figura en los manuscritos, sino que es obra de To-

2. De las otras líneas, si estando en un plano tienen los mismos extremos, tales líneas son desiguales, siempre que ambas sean cóncavas hacia el mismo lado y o bien una de ellas esté completamente comprendida por la otra y la recta que tiene los mismos extremos que ella, o bien una parte esté comprendida y otra parte sea común; y la línea comprendida es menor.
3. De modo semejante, de las superficies que tienen los mismos extremos, si tienen los extremos en un plano, la menor es el plano.
4. De las otras superficies que también tienen los mismos extremos, si los extremos están en un plano, tales superficies son desiguales, puesto que si ambas superficies fueran cóncavas hacia el mismo lado, o bien una superficie estará comprendida entera por la otra y por el plano que tiene los mismos extremos que ella, o bien una parte estará comprendida y otra la tendrá en común; y la superficie comprendida será menor.
5. Y además, en las líneas desiguales y las superficies desiguales y los sólidos desiguales el mayor excede al menor en una magnitud tal que, añadida a sí misma, es capaz de exceder cualquier magnitud propuesta de las que decimos que guardan razón.[7]

---

relli. Los griegos conocieron varias definiciones de la recta. La definición euclidiana, de carácter geométrico, «Línea recta es la que yace por igual respecto a los puntos que hay en ella» (*Elementos* I def. 4) —precedida en I, def. 2 de la definición de línea como «longitud sin anchura»—; la platónica «Recto es aquello cuyo medio está enfrente de ambos extremos», de carácter óptico (*Parménides* 137e); y la de Arquímedes que figura en este texto, de carácter físico y la única que puede ser sometida a prueba. Cf. el amplísimo comentario de HEATH a las definiciones euclidianas mencionadas en *The Thirteen Books of the Elements*, 3 vols., Nueva York, 1956²ʳ, vol. I, págs. 158-165 y 165-169, y CH. MUGLER, «Sur l'histoire de quelques définitions de la géométrie grecque et les rapports entre la géométrie et l'optique», *L'Antiquité Classique* 26 (1957), 331-345. En español puede verse EUCLIDES, *Elementos* I, def. 4 (traducción y nota de M. L. PUERTAS en Gredos, Madrid, vol., 155, 1994). La prueba nos la ofrece EUTOCRO, *Coment.*, 6 recurriendo a EUCLIDES I 20: «En todo triángulo, dos lados tomados juntos de cualquier manera son mayores que el restante» y está expresada como sigue: «Sea en un plano un segmento de recta AB, y otra línea AΓB que tenga los mismos extremos A, B. Pide que se le acepte que AB es menor que AΓB. Afirmo que lo que postulaba era cierto. Tómese en la recta AΓB un punto al azar Γ y trácense AΓ, ΓB. Es evidente que la suma de AΓ, ΓB es mayor que AB *[Elem. I 20]*. Tómense de nuevo en la línea AΓB dos puntos al azar Δ, E, y trácense AΔ, ΔΓ, ΓE, EB. De modo semejante, también aquí es evidente que la suma de las dos líneas AΔ, AΓ es mayor que AΓ, y que la suma de las dos líneas ΓE, EB es mayor que ΓB. De manera que la suma de las líneas AΔ, AΓ, ΓE, EB es mucho mayor que AB. De manera semejante, si tomamos otros puntos entre los ya tomados y trazamos rectas que unan los recién tomados, hallaremos que éstas siguen siendo mayores que AB, y haciendo esto repetidamente hallaremos que las rectas que más se aproximan a la línea ABΓ son aún mayores. A partir de esto es evidente que esta recta es mayor que AB, ya que es posible, trazando rectas (desde los extremos) hasta cualquiera de sus puntos, tomar una línea compuesta de rectas tal que se demuestre, mediante los mismos razonamientos, que ella misma es mayor que AB».

7. El sentido de las últimas palabras de este postulado (*tôn pròs állēla legoménōn*) se ha tenido, en general, por poco claro, como prueban las distintas traducciones que se han dado. Cf. DIJSTERHUIS, *Archimedes*, Princeton, 1987, págs. 146-149, en donde aparecen recogidas y comentadas las diversas versiones. Sin embargo, la expresión coincide exactamente con la empleada por EUCLIDES en *Elementos* V, def. 4 («Se dice que guardan relación entre sí —*pròs állēla échein*— las magnitudes que al multiplicarse pueden exceder la una a la otra»), por lo que entiendo que la interpretación, se traduzcan los pasajes como se traduzcan, debe ser la misma para ambos. De hecho, independientemente de la cuestión de la literalidad, este postulado se ha interpretado siempre como una extensión de ese principio, atribuido, como el resto del contenido del libro V de *los Elementos*, a Eudoxo. Para Dijksterhuis, sin embargo, se trata también del rechazo de ciertos métodos útiles como herramientas heurísticas, pero matemáticamente poco rigurosos, y piensa que hay que interpretar este quinto postulado en el sentido que sigue: «si dos magnitudes satisfacen el axioma de Eudoxo una respecto a la otra, también su diferencia satisface ese postulado respecto a cualquier magnitud de la misma especie homogénea con ambas».

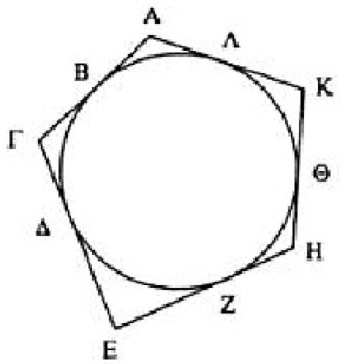
Supuesto esto, si se inscribe un polígono en un círculo, es evidente que el perímetro del polígono inscrito es menor que la circunferencia del círculo, pues cada uno de los lados del polígono es menor que el arco de circunferencia del círculo cortado por él.

PROPOSICIÓN 1

Si se circunscribe un polígono a un círculo, el perímetro del polígono circunscrito es mayor que el perímetro del círculo.

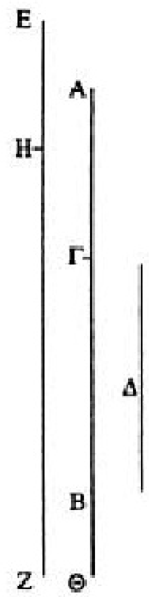
Circunscríbase al círculo el polígono supuesto.

Digo que el perímetro del polígono es mayor que el perímetro del círculo.



Puesto que la suma de BAΛ es mayor que el arco de circunferencia BΛ, ya que comprende el arco de circunferencia que tiene los mismos extremos [Post. 2] e, igualmente, la suma de ΔΓ, ΓB es mayor que el arco ΔB, y la suma de ΛK, KΘ mayor que el arco ΛΘ, y la suma de ZHΘ mayor que el arco ZΘ, y también la suma de ΔE, EZ mayor que el arco ΔZ, entonces el perímetro entero del polígono es mayor que el perímetro del círculo.

PROPOSICIÓN 2



Dadas dos magnitudes desiguales es posible hallar dos rectas desiguales de modo que la recta mayor guarde con la menor una razón menor que la magnitud mayor con la menor.

Sean AB, Δ dos magnitudes desiguales y sea mayor AB.

Digo que es posible hallar dos rectas desiguales que cumplan la indicación dada.

Póngase, según la segunda proposición del Libro I de Euclides [*Elem.* I 2], la magnitud BΓ igual a Δ y póngase una línea recta, ZH; la magnitud ΓA sumada a sí misma excederá de Δ [Post. 5]. Multiplíquese entonces y sea AΘ, y cuantas veces es múltiplo AΘ de AΓ, otras tantas veces sea múltiplo ZH de HE.

Por tanto, ΘA es a AΓ como ZH a HE [*Elem.* V 15]; y por inversión [*Elem.* V 7, cor.], EH es a HZ como AΓ es a AΘ. Y puesto que AΘ es mayor que Δ —es decir, que ΓB—, entonces ΓA guarda con AΘ una razón menor que la de ΓA con ΓB [*Elem.* V 8]. Pero ΓA es a AΘ como EH a HZ; luego EH guarda con HZ una razón menor que la de ΓA con ΓB; y por composición [*Elem.* V, def. 14], EZ guarda con ZH una razón menor que AB con BΓ.[8] Y BΓ es igual a Δ; luego EZ guarda con ZH una razón menor que AB con Δ.

8. [*Por el lema*], añaden los manuscritos; mas si alguna vez existió tal lema, no se nos ha transmitido; PAPO (HULTSCH, II, 684) y EUTOCIO (16, 11-18, 22) demuestran el aserto.

Luego han sido halladas dos rectas desiguales que cumplen la indicación dada.[9]

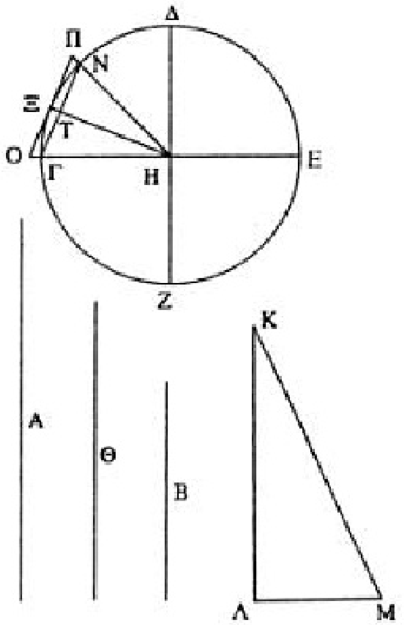
PROPOSICIÓN 3

Dadas dos magnitudes desiguales y un círculo, es posible inscribir en el círculo un polígono y circunscribir otro de modo que el lado del polígono circunscrito guarde con el lado del polígono inscrito una razón menor que la magnitud mayor con la menor.

Sean A, B las dos magnitudes dadas, y el círculo dado, el supuesto.

Digo que es posible cumplir la indicación.

Hállense dos rectas, Θ, KΛ, de las cuales sea Θ la mayor, de manera que Θ guarde con KΛ una razón menor que la magnitud mayor con la menor [Prop. 2], y desde Λ trácese ΛM perpendicular a ΛK [*Elem.* I 11] y desde K trácese KM igual a Θ,[10] y trácense dos diámetros del círculo mutuamente perpendiculares, ΓE, ΔZ.



Al cortar por la mitad el ángulo comprendido por ΔHΓ, y la mitad de éste por la mitad, y obrando así sucesivamente, dejaremos un ángulo menor que el doble del comprendido por ΛKM. Dejémoslo, y sea el comprendido por NHΓ, y trácese la recta NΓ. Entonces, NΓ es el lado de un polígono equilátero.[11]

Y córtese por la mitad el ángulo comprendido por ΓHN mediante la recta HΞ, y desde el punto Ξ trácese OΞΠ tangente al círculo, y prolónguense las rectas HNΠ, HΓO. De modo que también ΠO es el lado del polígono circunscrito al círculo, también equilátero. Puesto que el ángulo comprendido por NHΓ es menor que el doble del ángulo comprendido por ΛKM, y es el doble del comprendido por THΓ, entonces el

9. [*Es decir, que la mayor guarda con la menor una razón menor que la magnitud mayor con la menor*].

10. [*Pues esto es posible*].

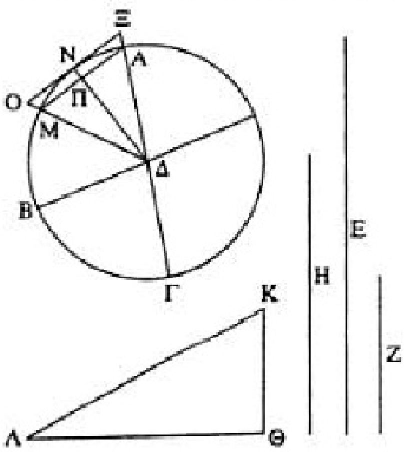
11. [*Puesto que el ángulo comprendido por NHΓ medirá al comprendido por ΔHΓ; que es recto, y entonces el arco NΓ medirá a ΓΔ, que es un cuarto de círculo; de manera que también medirá al círculo. Luego es el lado de un polígono equilátero, pues esto es evidente*]. En EUT. 18, 29-30, esta expresión figura como «de un polígono equilátero de número par de lados».

comprendido por THΓ es menor que el comprendido por ΛKM. Y los ángulos de vértice en Λ, T son rectos. Entonces MK guarda con ΛK una razón mayor que ΓH con HT. Y ΓH es igual a HΞ; de manera que HΞ guarda con HT —es decir, no con NΓ— una razón menor que MK con KΛ. Y además, MK guarda con KΛ una razón menor que A con B.[12] Y ΠO es el lado del polígono circunscrito, y ΓN el del inscrito.

Que es lo que se había propuesto hallar.

PROPOSICIÓN 4

Habiendo de nuevo dos magnitudes desiguales y un sector, es posible circunscribir un polígono al sector e inscribir otro, de manera que el lado del circunscrito guarde con el lado del inscrito una razón menor que la magnitud mayor con la menor.



Sean de nuevo dos magnitudes desiguales E, Z, de las cuales sea E la mayor, y un círculo ABΓ que tenga por centro Δ; y constrúyase en el punto Δ el sector AΔB.

Hay que circunscribir un polígono e inscribir otro en el sector ABΔ, que tenga sus lados iguales excepto BΔ, ΔA, de modo que se cumpla la indicación.

Hállense dos rectas desiguales H, ΘK, y sea mayor H, de manera que H guarde con ΘK una razón menor que la que guarda la magnitud mayor con la menor [Prop. 2];[13] y trazada desde el punto Θ una perpendicular a KΘ del mismo modo [Prop. 3], prolónguese KΛ hasta que sea igual a H.[14] Una vez cortado por la mitad el ángulo comprendido por AΔB, y cortada su mitad por la mitad y hecho esto sucesivamente, quedará un ángulo que sea menor que el doble del comprendido por ΛKΘ. Quede, pues, el ángulo AΔM; entonces AM resulta ser el lado del polígono inscrito en el círculo.

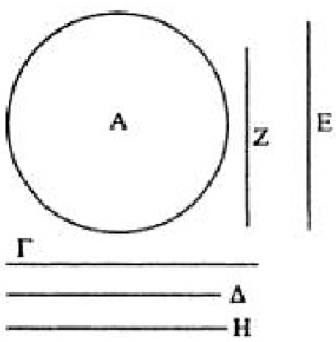
Y si cortamos por la mitad el ángulo comprendido por AΔM mediante la recta ΔN y trazamos desde N la recta ΞNO tangente al círculo, ésta será el lado del polígono circunscrito al mismo círculo y semejante al polígono indicado. Y de modo semejante a lo dicho antes [Prop. 3], ΞO guarda con AM una razón menor que la magnitud E con la magnitud Z.

PROPOSICIÓN 5

Dado un círculo y dos magnitudes desiguales, circunscribir al círculo un polígono e inscribir otro de manera que el circunscrito guarde con el inscrito una razón menor que la magnitud mayor con la menor.

Póngase el círculo A y dos magnitudes desiguales E, Z, y sea E la mayor.

12. Por hipótesis, $\Theta : K\Lambda < A : B$, y por construcción $MK = \Theta$.
13. [*Pues esto es posible*].
14. [*Es posible, puesto que H es mayor que ΘK*].



Es preciso inscribir un polígono en el círculo y circunscribir otro, de modo que se cumpla lo indicado.

Tomo dos rectas desiguales, Γ, Δ, de las cuales sea Γ la mayor, de manera que Γ guarde con Δ una razón menor que E con Z [Prop. 2]. Y si se toma H como media proporcional de Γ, Δ [*Elem.* VI 13], entonces Γ será mayor que H. Circunscríbase al círculo un polígono e inscríbase otro de manera que el lado del polígono circunscrito guarde con el del inscrito una razón menor que Γ con H[15] [Prop. 3].

Por eso precisamente la razón de los cuadrados es menor que la razón de los cuadrados.[16] Y la razón del polígono al polígono es la razón del cuadrado del lado al cuadrado del lado [*Elem.* VI 20]:[17] la de Γ con Δ, cuadrado de la de Γ con H.

Luego el polígono circunscrito guarda con el inscrito una razón menor que la de Γ con Δ; luego con más razón el circunscrito guarda con el inscrito una razón menor que la de E con Z.

PROPOSICIÓN 6[18]

De la misma manera demostraremos que *dadas dos magnitudes desiguales y un sector, es posible circunscribir al sector un polígono e inscribir otro semejante a él, de manera que el circunscrito guarde con el inscrito una razón menor que la magnitud mayor con la menor*[19]

***

Y también esto es evidente: *si se da un círculo o un sector y un área, y se inscribe en el círculo o el sector un polígono equilátero y se repite la operación en los segmentos que quedan, es posible dejar unos segmentos del círculo o sector que sean menores que el área propuesta.* Esto se nos ha transmitido en los *Elementos.*[20]

***

15. [*Como acabamos de aprender*].

16. Es decir: «la razón del cuadrado del lado del polígono circunscrito con el cuadrado del lado del polígono inscrito es menor que la razón del cuadrado de lado Γ con el cuadrado de lado H», dado que, por construcción, $\Gamma : \Delta < E : Z$.

17. [*Pues son semejantes*].

18. La presente es una proposición anómala en cuanto a la forma en la que se reúnen varios enunciados de fácil demostración según el método empleado en las proposiciones 2 a 5 y otro más que sí requiere de explicación.

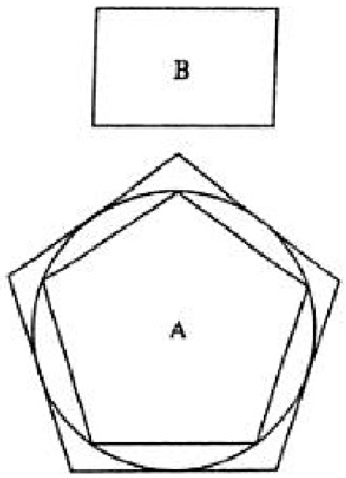
19. Cf. Prop. 4.

20. La literalidad de la frase parece dar a entender que la demostración de este enunciado figurase ya en los *Elementos*. Lo que allí encontramos es que en *Elem.* X 1 se demuestra que «*Dadas dos magnitudes desiguales, si de la mayor se quita una parte mayor que su mitad y del resto se quita una parte mayor que su mitad y se procede así repetidamente, quedará una magnitud que será menor que la magnitud menor propuesta*». Esa proposición se utiliza en *Elem.* XII 2, en donde se recurre a ese método al efecto de demostrar que «*Los círculos son entre sí como los cuadrados construidos sobre sus diámetros*». Allí podemos leer que «*si se dividen por la mitad los arcos que van quedando y trazamos rectas que unan sus extremos y actuamos así repetidamente, dejaremos unos segmentos de círculo menores que el exceso en que excede el círculo EZHΘ al área Σ*».

Se ha de demostrar también que, *dado un círculo o un sector y un área, es posible circunscribir un polígono al círculo o al sector de modo que los segmentos que quedan después de circunscribir sean menores que el área dada. Y tras demostrarlo en el caso del círculo cabrá traspasar el mismo razonamiento también al caso del sector.*

Sean dados un círculo A y un área B.

Es posible circunscribir un polígono al círculo, de manera que los segmentos que queden entre el círculo y el polígono sean menores que el área B.



Pues habiendo dos magnitudes desiguales —mayor la suma del área y el círculo, menor el círculo— circunscríbase al círculo un polígono e inscríbase otro de manera que el circunscrito guarde con el inscrito una razón menor que la indicada magnitud mayor con la menor [Prop. 5]. Este polígono circunscrito es tal que las áreas que quedan en torno[21] son menores que el área propuesta B.

Si el polígono circunscrito guarda con el inscrito una razón menor que la suma del círculo y el área B con el propio círculo, y el círculo es mayor que el polígono inscrito, entonces con más razón el polígono circunscrito guarda con el círculo una razón menor que la suma del círculo y el área B con el propio círculo [*Elem.* V 10]; y, por descomposición [*Elem.* V, def. 15], los restos del polígono circunscrito guardan con el círculo una razón menor que el área B con el círculo.

Luego los restos del polígono circunscrito son menores que el área B [*Elem.* V 10].

O así:[22] puesto que el polígono circunscrito guarda con el círculo una razón menor que la suma del círculo y el área B con el círculo, por eso precisamente el polígono circunscrito será menor que la suma. De modo que también (la suma de) todos los restos será menor que el área B.

Y de modo semejante en el caso del sector.

21. Se refiere a las áreas que quedan entre el polígono y el círculo en torno al cual está circunscrito.

22. La doble demostración para este enunciado es otra de las anomalías de esta proposición; Eutocio conoció la segunda de ellas, pues es la que cita en su *Comentario*.

Heiberg (*Arquímedes Opera omnia cum comentariis Eutocii*, Leipzig, Teubner, 1913, vol. I, pág. 23) considera improbable que las dos soluciones procedan de Arquímedes, y sugiere una solución única, cuya traducción sería «*El polígono circunscrito guarda con el inscrito una razón menor que la de la suma del círculo y el área B con el círculo. Por ello precisamente el polígono circunscrito es menor que la suma de ambos; de manera que también los restos son menores que el área B*».

PROPOSICIÓN 7

Si en un cono isósceles se inscribe una pirámide de base equilátera, la superficie de ésta, excluida la base, es igual a un triángulo que tenga su base igual al perímetro de la base y por altura la perpendicular trazada desde el vértice hasta un lado de la base.

Sea un cono isósceles cuya base sea el círculo ΑΒΓ e inscríbase en él una pirámide que tenga la base equilátera ΑΒΓ.

Digo que la superficie de ésta sin la base es igual al triángulo dicho.

Puesto que el cono es isósceles y la base de la pirámide es equilátera, las alturas de los triángulos que contienen la pirámide son iguales entre sí. Y esos triángulos tienen por bases las rectas ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ y por altura, la dicha. De manera que los triángulos son iguales a un triángulo que tenga por base una recta igual a (la suma de) ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ, y por altura, la recta dicha [*Elem.* VI 1].[23]

PROPOSICIÓN 8

Si se circunscribe una pirámide a un cono isósceles, la superficie de la pirámide, excluida la base, es igual a la de un triángulo que tenga por base una recta igual al perímetro de la base y por altura la generatriz del cono.

Sea un cono cuya base sea el círculo ΑΒΓ y circunscríbase una pirámide de manera que su base, esto es, el polígono ΔΕΖ, esté circunscrito al círculo ΑΒΓ.

Digo que la superficie de la pirámide, excluida la base, es igual al triángulo dicho.

Puesto que[24] las rectas trazadas desde el centro del círculo hasta los puntos de tangencia son perpendiculares a las tangentes [*Elem.* III 18], entonces también las rectas trazadas desde el vértice del cono hasta los puntos de tangencia con las rectas ΔΕ, ΖΕ, ΖΔ son perpendiculares a ellas.[25] Por tanto, las perpendiculares mencionadas ΗΑ, ΗΒ, ΗΓ son iguales entre sí, pues son generatrices del cono.

Sea el triángulo ΘΚΛ que tiene el lado ΘΚ igual al perímetro del triángulo ΔΕΖ y la perpendicular ΛΜ igual a ΗΑ.

Puesto que el paralelogramo comprendido por ΔΕ, ΑΗ es el doble del triángulo ΕΔΗ [*Elem.* I 41], y el comprendido por ΔΖ, ΗΒ es el doble del triángulo ΔΖΗ, y el comprendido por ΕΖ, ΓΗ es el doble del triángulo ΕΗΖ, entonces el paralelogramo comprendido por ΘΚ y ΑΗ —esto es, ΜΛ— es el doble de (la suma de) los triángulos ΕΔΗ, ΖΔΗ, ΕΗΖ. Y además el paralelogramo comprendido por ΘΚ, ΛΜ es el doble del triángulo ΛΚΘ [*Elem.* I41].

Por eso la superficie de la pirámide, excluida la base, es igual a un triángulo que tenga la base igual al perímetro de ΔΕΖ y por altura la generatriz del cono.

23. [*Es decir, que es la superficie de la pirámide sin el triángulo ΑΒΓ*].

24. [*El eje del cono es perpendicular a la base, es decir, al círculo ΑΒΓ, y*].

25. En Eut. 22, la frase presenta esta otra formulación: «... las rectas trazadas desde el vértice del cono hasta los puntos Α, Β, Γ son perpendiculares a ellas».

PROPOSICIÓN 9

Si en un cono isósceles una recta corta al círculo que es la base del cono y desde los extremos de la recta se trazan líneas rectas hasta el vértice del cono, el triángulo comprendido por la secante y las rectas trazadas hasta el vértice será menor que la superficie del cono que queda entre las líneas trazadas hasta su vértice.

Sea el círculo ABΓ la base del cono isósceles, Δ su vértice, y trácese en su interior[26] una recta, AΓ, y desde el vértice hasta A, Γ trácense las rectas AΔ, ΔΓ.

Digo que el triángulo AΔΓ es menor que la superficie del cono que queda entre AΔΓ.[27]

Córtese por la mitad el arco ABΓ por el punto B, y trácense AB, ΓB, ΔB; los triángulos ABΔ, BΓΔ serán mayores que el triángulo AΔΓ.[28] Sea Θ el área en que los triángulos indicados exceden al triángulo AΔΓ. Entonces, o bien Θ es menor que los segmentos AB, BΓ o no.

Primero, no sea menor.

Puesto que hay dos superficies —la superficie del cono que queda entre las líneas AΔB más el segmento AEB y la del triángulo AΔB— que tienen el mismo límite —el perímetro del triángulo AΔB—, será mayor la que comprenda a la otra que la comprendida por ella [Post. 4]. Luego la superficie del cono que queda entre las rectas AΔB más el segmento AEB es mayor que el triángulo ABΔ. Igualmente, también la que queda entre las líneas BΔΓ más el segmento ΓZB es mayor que el triángulo BΔΓ. Luego toda la superficie del cono junto con el área Θ es mayor que los triángulos mencionados. Y los triángulos mencionados son iguales al triángulo AΔΓ más el área Θ [por hipót.]. Réstese de ambos[29] el área Θ.

Entonces el resto de la superficie del cono que queda entre AΔΓ es mayor que el triángulo AΔΓ.

Sea ahora Θ menor que los segmentos AB, BΓ.

Si se cortan por la mitad los arcos AB, BΓ y se cortan por la mitad sus mitades, dejaremos segmentos que sean menores que el área Θ. Queden los segmentos correspondientes a las cuerdas AE, EB, BZ, ZΓ, y trácense las rectas ΔE, ΔZ.

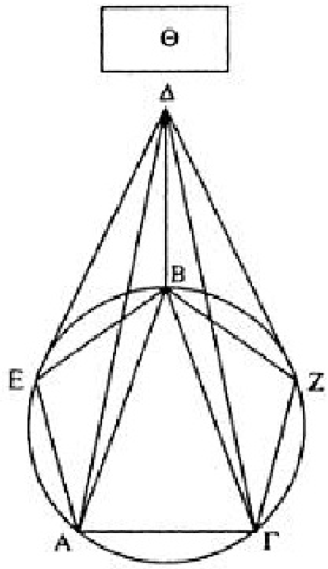
De nuevo, según el mismo razonamiento [Post. 4], la superficie del cono que queda entre AΔE más el segmento correspondiente a la cuerda AE es mayor que el triángulo AΔE, y la que queda entre las líneas EΔB más el segmento correspondiente a la cuerda EB es mayor que el triángulo EΔB. Luego la superficie que queda entre AΔ, ΔB más los

26. Es decir, «en el interior del círculo base del cono».

27. Se refiere a la superficie cónica *lateral* comprendida por las rectas AΔ, AΓ y el arco AΓ. Heiberg afirma que seguramente Arquímedes incluía esa precisión en el enunciado, como se desprende de la redacción que encontramos en el lugar correspondiente de la proposición 10.

28. EUT. (24, 18 y ss.) ofrece la siguiente prueba: «Puesto que el ángulo de vértice en Δ es un ángulo sólido, la suma de los ángulos AΔB, BΔΓ es mayor que el ángulo AΔΓ [*Elem.* XI 20], y si trazamos desde el vértice hasta la mitad de la base la recta AE que sea perpendicular a AΓ, el ángulo AΔB será mayor que el AΔE. Constrúyase el ángulo AΔZ igual a AΔB, y trácese AZ una vez construida ΔZ igual a ΔΓ. Puesto que los lados son iguales dos a dos y también un ángulo a otro ángulo, también el triángulo ABΔ es igual al triángulo AΔZ [*Elem.* I 4], que es mayor que el AΔE. Luego también el triángulo ABΔ es mayor que el AΔE. E igualmente también el triángulo ABΓ mayor que el ΔEΓ. Luego la suma de los dos triángulos AΔB, BΔΓ es mayor que el triángulo AΔΓ». DIJKSTERHUIS considera esta prueba insuficiente y ofrece una demostración basada, como la de Eutocio, en *Elem.* XI 20 («En todo ángulo diedro formado por tres ángulos planos la suma de dos de los ángulos planos es siempre mayor que el tercero»).

29. Se entiende «de ambos miembros de la igualdad».



segmentos correspondientes a las cuerdas AE, EB es mayor que los triángulos AΔE, EBΔ. Puesto que los triángulos AEΔ, ΔEB son mayores que el triángulo ABΔ, como se ha demostrado, entonces la superficie del cono que queda entre AΔB y los segmentos correspondientes a las cuerdas AE, EB será, con más razón, mayor que el triángulo AΔB. Por el mismo razonamiento, también la superficie que queda entre BΔΓ más los segmentos correspondientes a las cuerdas BZ, ZΓ es mayor que el triángulo BΔΓ. Luego toda la superficie que queda entre AΔΓ junto con los segmentos indicados es mayor que los triángulos ABΔ, ΔBΓ. Y éstos son iguales al triángulo AΔΓ más el área Θ [por hipót.]. De entre estas superficies, los segmentos mencionados son menores que el área Θ [por const.]; luego la superficie comprendida entre las rectas AΔΓ es mayor que el triángulo AΔΓ.

PROPOSICIÓN 10

Si al círculo que sirve de base a un cono[30] *se le trazan tangentes que estén en el mismo plano del círculo y que se corten unas a otras y desde los puntos de tangencia y de intersección mutua se trazan rectas hasta el vértice del cono, los triángulos comprendidos por las tangentes y las rectas trazadas hasta el vértice del cono son mayores que la superficie del cono comprendida por ellas.*

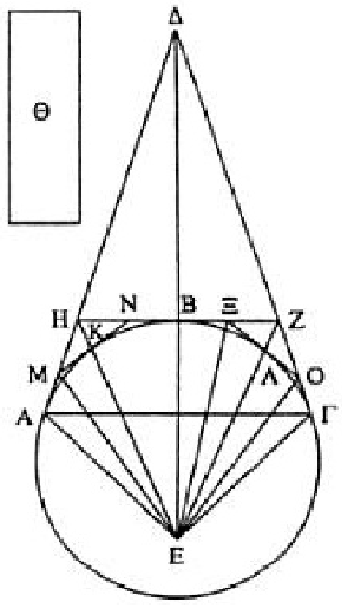
Sea un cono cuya base sea el círculo ABΓ y su vértice el punto E, y trácense AΔ, ΓΔ tangentes al círculo ABΓ y que estén en el mismo plano; y desde el punto E, que es el vértice del cono, trácense EA, EΔ, EΓ hasta los puntos A, Δ, Γ.

Digo que los triángulos AΔE, ΔEΓ son mayores que la superficie cónica que queda entre las rectas AE, ΓE y el arco ABΓ.

Una vez cortado por la mitad el arco ABΓ por el punto B trácese HBZ que sea tangente al círculo y paralela a AΓ; y desde los puntos H, Z hasta E trácense las rectas HE, ZE. Y puesto que la suma de HΔ, ΔZ es mayor que HZ [*Elem.* I 20], añádanseles en co-

30. Se ha de entender que se trata de un cono isósceles.

mún[31] las rectas HA, ZΓ. Entonces (la suma de) las rectas AΔ, ΔΓ enteras es mayor que (la suma de) las rectas AH, HZ, ZΓ. Y puesto que AE, EB, EΓ son generatrices del cono, son iguales por tratarse de un cono isósceles. E igualmente son perpendiculares;[32] luego (la suma de) los triángulos AEΔ, ΔEΓ es mayor que (la suma de) los triángulos AHE, HEZ, ZEΓ [*Elem.* VI 1].[33] Sea Θ el área en que los triángulos AEΔ, ΔΓE son mayores que los triángulos AEH, HEZ, ZEΓ. Y el área Θ o bien es menor que las áreas restantes[34] AHBK, BZΓΛ o no es menor.



Primero, no sea menor.

Puesto que son superficies compuestas —la de la pirámide que tiene por base el trapecio HAΓZ y por vértice el punto y la superficie cónica que queda entre las líneas AE, EΓ más el segmento ABΓ— y tienen por límite el mismo perímetro del triángulo AEΓ, es evidente que la superficie de la pirámide sin el triángulo AEΓ es mayor que la superficie cónica más el segmento ABΓ [Post. 4]. Quítese de ambas el segmento ABΓ; entonces los triángulos restantes AHE, HEZ, ZEΓ junto con los restos circundantes AHBK, BZΓΛ son mayores que la superficie cónica que queda entre AE, EΓ. Y el área Θ no es menor que las áreas que quedan circundantes AHBK, BZΓΛ [por hipótesis].

Luego los triángulos AHE, HEZ, ZEΓ junto con Θ serán con más razón mayores que la superficie cónica que queda entre AE, EΓ. Y los triángulos AHE, HEZ, ΓEZ junto con Θ son los triángulos AEΔ, ΔEΓ; luego los triángulos AEΔ, ΔEΓ serán mayores que la superficie cónica mencionada.

31. Es decir, «a los dos miembros de la desigualdad».

32. [*Como queda demostrado en el lema*]. [*Y los paralelogramos comprendidos por las alturas y las bases son el doble que los triángulos*]. El lema no figura en los mss.; la demostración figura en el comentario de Eutocio a la proposición 8.

33. [*Porque AH, HZ, ZΓ son menores que ΓΔ, ΔA y sus alturas son iguales*]. [*Pues es evidente que la línea trazada desde el vértice del cono rectángulo hasta el punto de tangencia de la base es perpendicular a la tangente*].

34. Se refiere a las áreas comprendidas por los arcos del círculo que sirve de base al cono y la línea quebrada formada por cada dos tangentes consecutivas al cortarse.

Sea ahora Θ menor que los restos circundantes.

Si del mismo modo circunscribimos repetidamente polígonos a los segmentos, al cortar por la mitad los arcos que quedan en torno y trazar las tangentes, dejaremos ciertos restos de áreas que serán menores que el área Θ. Déjense y sean AMK, KNB, BΞΛ, ΛΟΓ, que son menores que el área Θ, y únanse con E.

De nuevo es evidente que (la suma de) los triángulos AHE, HEZ, ZEΓ será mayor que (la suma de) los triángulos AEM, MEN, NEΞ, ΞΕΟ, ΟΕΓ.[35] Y otra vez del mismo modo la pirámide que tiene por base el polígono AMNΞΟΓ y por vértice E tiene una superficie mayor, sin el triángulo AEΓ, que la superficie cónica que queda entre AEΓ más el segmento ABΓ [Post. 4]. Quítese de ambos[36] el segmento ABΓ; entonces los triángulos restantes AEM, MEN, NEΞ, ΞΕΟ, ΟΕΓ junto con las áreas que quedan circundantes AMK, KNB, BΞΛ, ΛΟΓ serán mayores que la superficie cónica que queda entre AEΓ. Pero el área Θ es mayor que las áreas circundantes mencionadas [por hipót.], y se ha demostrado que los triángulos AHE, HEZ, ZEΓ son mayores que los triángulos AEM, MEN, NEΞ, ΞΕΟ, ΟΕΓ.

Luego los triángulos AHE, HEZ, ZEΓ junto con el área Θ —es decir, los triángulos AΔE, ΔEΓ— son con más razón mayores que la superficie cónica comprendida por las rectas AEΓ.

PROPOSICIÓN 11

Si en la superficie de un cilindro recto hubiera dos rectas, la superficie del cilindro que queda entre las rectas es mayor que el paralelogramo comprendido por las rectas que están en la superficie del cilindro y las rectas que unen sus extremos.

[...]

PROPOSICIÓN 12

Si en la superficie de un cilindro recto hubiera dos rectas, y desde los extremos de las rectas se trazaran tangentes a los círculos que son las bases del cilindro de modo que estén en los planos de éstas[37] y se corten, los paralelogramos comprendidos por las tangentes y las generatrices del cilindro serán mayores que la superficie del cilindro que queda entre las rectas que están en la superficie del cilindro.

Sea el círculo ABΓ la base de un cilindro recto y haya en su superficie dos rectas cuyos extremos sean A, Γ; y desde A, Γ trácense tangentes al círculo que estén en el mismo plano y córtense en H; considérense trazadas también en la otra base del cilindro rectas tangentes al círculo desde los extremos [de las rectas][38] en su superficie.

35. [*Pues las bases son mayores que las bases y la altura es igual*].
36. Entiéndase «de ambos miembros de la desigualdad».
37. Es decir, «en los planos de las bases».
38. Lo contenido entre corchetes es adición de Heiberg.

Se ha de demostrar que los paralelogramos comprendidos por las tangentes y las generatrices del cilindro son mayores que la superficie del cilindro correspondiente al arco ΑΒΓ.

[Una vez cortado por la mitad el arco ΑΒΓ por el punto B],[39] trácese la tangente EZ, y desde los puntos E, Z trácense unas rectas paralelas al eje del cilindro[40] hasta la otra base. Así, los paralelogramos comprendidos por AH, HT y las generatrices del cilindro son mayores que los paralelogramos comprendidos por AE, EZ, ZΓ y la generatriz del cilindro.[41] Sea el área K (la magnitud) en que son mayores.

Entonces, la mitad del área K es mayor que las figuras comprendidas por las rectas AE, EZ, ZΓ y los arcos ΑΔ, ΔΒ, ΒΘ, ΘΓ o no.

Sea primero mayor.

El límite de la superficie compuesta por los paralelogramos correspondientes a las rectas AE, EZ, ZΓ y el trapecio AEZΓ y su opuesto en la otra base del cilindro es el perímetro del paralelogramo correspondiente a ΑΓ. Y el mismo perímetro es también límite de la superficie compuesta por la superficie del cilindro correspondiente al arco ΑΒΓ más los segmentos ΑΒΓ y su opuesto. Entonces, las superficies mencionadas tienen precisamente el mismo límite, que está en un plano, y ambas son cóncavas hacia el mismo lado y una de ellas contiene unas partes de la otra y las otras partes las tienen en común. Luego la contenida es menor [Post. 4]. Quitadas las partes comunes —el segmento ΑΒΓ y su opuesto— la superficie del cilindro correspondiente al arco ΑΒΓ es menor que la superficie compuesta por los paralelogramos correspondientes a las rectas AE, EZ, ZΓ más las figuras AEB, BZΓ y sus opuestas. Y las superficies de los paralelogramos mencionados junto con las figuras mencionadas son menores que la superficie compuesta por los paralelogramos correspondientes a AH, HΓ.[42]

Por tanto, es evidente que los paralelogramos comprendidos por AH, ΓH y las generatrices del cilindro son mayores que la superficie del cilindro correspondiente al arco ΑΒΓ.

Y si la mitad del área K no es mayor que las figuras mencionadas, se trazarán rectas tangentes al segmento de modo que las restantes figuras circundantes resulten ser menores que la mitad de K,[43] y lo demás se demostrará igual que lo de arriba.[44]

***

Demostrado esto está claro que,[45] si se inscribe una pirámide en un cono isósceles, la superficie de la pirámide excluida la base es menor que la superficie del cono [Prop. 9][46] y que si se circunscribe una pirámide a un cono isósceles, la superficie de

39. Nizze y Heiberg proponen suplir el texto de los mss. con la expresión entre corchetes siguiendo una indicación marginal de B.

40. La expresión [*la superficie de*] que aparece en los mss. es evidentemente errónea.

41. [*Puesto que EH, HZ son mayores que EZ, añádanse en común AE, ZΓ. Entonces las rectas HA, HΓ enteras son mayores que AE, EZ, ZΓ*].

42. [*Ya que junto con K, que es mayor que las figuras, eran iguales a ellos*].

43. Cf. prop. 6.

44. Prop. 11.

45. [*Sobre la base de lo dicho anteriormente*].

46. [*Pues cada uno de los triángulos que contienen la pirámide es menor que la superficie del cono que queda entre los lados del triángulo; de manera que también la superficie entera de la pirámide excluida la base es menor que la superficie del cono excluida la base*].

la pirámide excluida la base es mayor que la superficie del cono excluida la base [Prop. 10].[47]

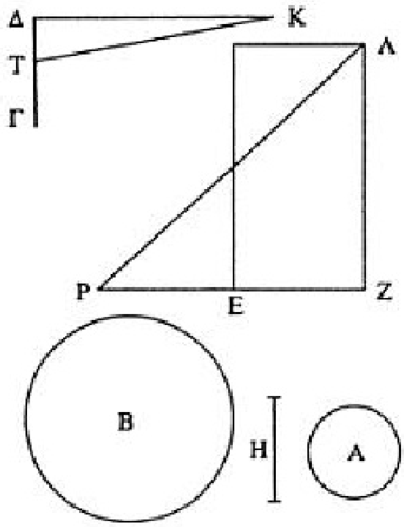
***

Está claro a partir de lo demostrado que si se inscribe un prisma en un cilindro recto, la superficie del prisma compuesta por los paralelogramos es menor que la superficie del cilindro excluidas las bases[48] [Prop. 11], y que si se circunscribe un prisma a un cilindro recto, la superficie del prisma compuesta por los paralelogramos es mayor que la superficie del cilindro excluidas las bases [Prop. 12].

PROPOSICIÓN 13

La superficie de todo cilindro recto excluida la base es igual a un círculo cuyo radio es media proporcional de la generatriz del cilindro y el diámetro de la base del cilindro.

Sea el círculo A la base de un cilindro recto y sea ΓΔ igual al diámetro del círculo A, y EZ igual a la generatriz del cilindro y téngase H por media proporcional de ΔΓ, EZ y póngase el círculo B cuyo radio sea igual a H.



Se ha de demostrar que el círculo B es igual a la superficie del cilindro excluida la base.

Pues si no es igual, ha de ser mayor o menor.

Sea primero, si es posible, menor.

Habiendo dos magnitudes desiguales —la superficie del cilindro y el círculo B— es posible inscribir en el círculo B un polígono equilátero y circunscribir otro de modo que el circunscrito guarde con el inscrito una razón menor que la que guarda la superficie del cilindro con el círculo B [Prop. 5]. Considérese circunscrito e inscrito, y cir-

47. [*Según se deduce de aquello*].

48. [*Ya que cada uno de los paralelogramos del prisma es menor que la superficie del cilindro correspondiente a él*]. «Bases» es corrección de Heiberg; los mss., aquí como más adelante, lín. 22, dan el singular «base».

cunscríbase al círculo A una figura rectilínea semejante a la circunscrita a B y a partir de esta figura rectilínea constrúyase un prisma.[49] Estará circunscrito al cilindro. Sea también KΔ igual al perímetro de la figura rectilínea circunscrita al círculo A, y ΛZ igual a KΔ y sea ΓT la mitad de ΓΔ. El triángulo KΔT será igual a la figura rectilínea circunscrita al círculo A,[50] y el paralelogramo EΛ igual a la superficie del prisma circunscrito al cilindro.[51] Póngase EP igual a EZ.

Entonces el triángulo ZPΛ es igual al paralelogramo EΛ [*Elem.* I 41], así que también a la superficie del prisma. Y puesto que las figuras rectilíneas circunscritas a los círculos A, B son semejantes, guardarán la misma razón[52] que los cuadrados construidos sobre los radios. Entonces el triángulo KTΔ guardará con la figura rectilínea circunscrita al círculo B la misma razón que el cuadrado de lado TΔ con el de lado H [*Elem.* VI 1].[53] Pero la razón que guarda el cuadrado de lado TΔ con el de lado H es la razón que guarda TΔ con PZ en longitud.[54] Y la razón que guarda TΔ con PZ en longitud es la que guarda el triángulo KTΔ con el triángulo PΛZ;[55] luego el triángulo KTΔ guarda con la figura rectilínea circunscrita al círculo B la misma razón que el triángulo TKΔ con el triángulo PZΛ. Luego el triángulo ZΛP es igual a la figura rectilínea circunscrita al círculo B [*Elem.* V 9]. De manera que también la superficie del prisma circunscrito al cilindro A es igual a la figura rectilínea circunscrita al círculo B. Y puesto que la figura rectilínea circunscrita al círculo B guarda con la figura inscrita en el círculo una razón menor que la que guarda la superficie del cilindro A con el círculo B [por hipót.], también la superficie del prisma circunscrito al cilindro guardará con la figura rectilínea inscrita en el círculo B una razón menor que la que guarde la superficie del cilindro con el círculo B y lo mismo tomando la proporción en alternancia.[56] Lo cual es imposible.[57]

Luego el círculo B no es menor que la superficie del cilindro.

Sea mayor, si es posible.

49. El prisma ha de ser «de la misma altura que el cilindro», como señala un escolio a B.

50. [*Puesto que tiene por base una recta igual a su perímetro y la altura igual al radio del círculo A*].

51. [*Puesto que está comprendido por la generatriz del cilindro y una recta igual al perímetro de la base del prisma*].

52. [*Las figuras rectilíneas*].

53. [*Puesto que las rectas TΔ, H son iguales a los radios*].

54. [*Ya que H es media proporcional de TΔ, PZ, puesto que lo es también de ΓΔ, EZ. ¿Cómo es eso? Puesto que ΔT es igual a TΓ y PE igual a EZ, entonces ΓΔ es el doble de TΔ y PZ el doble de PE; luego ΔΓ es a ΔT como PZ es a ZE; luego el rectángulo comprendido por ΓΔ, EZ es igual al comprendido por TΔ, EZ. Y el cuadrado de lado H es igual al rectángulo comprendido por ΓΔ, EZ; y entonces el cuadrado de lado H es igual al rectángulo comprendido por TΔ, PZ; luego TΔ es a H como H a PZ; luego TΔ es a PZ como el cuadrado de TΔ al cuadrado de H; y si tres rectas están en proporción, la primera es a la tercera como la figura construida sobre la primera es a la figura semejante y construida de manera semejante sobre la segunda* (*Elem.* VI 20, corol. 2)]. Se ha hecho notar en esta glosa la evidente ausencia de la concisión característica de los textos matemáticos y del estilo de Arquímedes; Heiberg abrevia la explicación en notación moderna del siguiente modo: Por hipótesis, $H^2 = \Delta\Gamma \times EZ$ y $\Delta\Gamma = 2T\Delta$, $EZ = 1/2PZ$; por lo cual, $H^2 = T\Delta \times EZ$, es decir, que $T\Delta : H :: H : PZ$, y es de aplicación *Elem.* VI 20, corol. 2, como figura en la glosa.

55. [*Puesto que KΔ, ΛZ son iguales*].

56. EUT. (32, 3-6) cita el texto de Arquímedes «Luego, tomando la proporción en alternancia, el prisma guarda con el cilindro una razón menor que el polígono inscrito en el círculo B con el círculo B. Lo cual es imposible», en lugar de las frases «Y lo mismo tomando la proporción en alternancia. Lo cual es imposible».

57. [*Ya que se ha demostrado que la superficie del prisma circunscrito al cilindro es mayor que la superficie del cilindro, mientras que la figura rectilínea inscrita en el círculo B es menor que el círculo B*]. El texto secluido resume el contenido del comentario de Eutocio.

Considérese de nuevo una figura rectilínea inscrita en el círculo B y otra circunscrita, de manera que la circunscrita guarde con la inscrita una razón menor que el círculo B con la superficie del cilindro [Prop. 5], e inscríbase en el círculo A un polígono semejante al inscrito en el círculo B, y constrúyase un prisma sobre el polígono inscrito en el círculo.[58] Y sea de nuevo KΔ igual al perímetro de la figura rectilínea inscrita en el círculo A, y sea ZΛ igual a ella.

Entonces el triángulo KTΔ será mayor que la figura rectilínea inscrita en el círculo A,[59] y el paralelogramo EΛ será igual a la superficie del prisma compuesta por paralelogramos.[60] De modo que también el triángulo PΛZ es igual a la superficie del prisma. Y puesto que las figuras rectilíneas inscritas en los círculos A, B son semejantes, guardan entre sí la misma razón que los cuadrados construidos sobre los radios de los círculos [*Elem.* XII 1]. Y también los triángulos KTΔ, ZPΛ guardan entre sí la razón de los cuadrados construidos sobre los radios de los círculos.[61] Luego la figura rectilínea inscrita en el círculo A guarda con la figura rectilínea inscrita en el círculo B la misma razón que el triángulo KTΔ con el triángulo ΛZP. Y la figura rectilínea inscrita en el círculo A es menor que el triángulo KTΔ. Luego también la figura rectilínea inscrita en el círculo B es menor que el triángulo ZPΛ; de manera que también es menor que la superficie del prisma inscrito en el cilindro. Lo cual es imposible.[62]

Luego el círculo B no es mayor que la superficie del cilindro.

Y se había demostrado que tampoco era menor. Luego es igual.

PROPOSICIÓN 14

La superficie de todo cono isósceles excluida la base es igual al círculo cuyo radio es media proporcional entre la generatriz del cono y el radio del círculo que es la base del cono.

Sea un cono isósceles cuya base sea el círculo A y sea Γ su radio y sea Δ igual a la generatriz del cono, y sea E media proporcional de Γ, Δ, y tenga el círculo B su radio igual a E.

Digo que el círculo B es igual a la superficie del cono excluida la base.

Pues si no es igual, o bien es mayor o menor.

Sea primero menor.

La superficie del cono y el círculo B son dos magnitudes desiguales, y la superficie del cono es mayor; luego es posible inscribir un polígono equilátero en el círculo B y

58. Entiéndase: «en el círculo A».

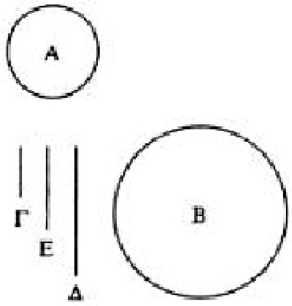
59. [*Puesto que por base tiene su perímetro y una altura mayor que la perpendicular trazada desde el centro hasta un lado del polígono*].

60. [*Puesto que está comprendido por la generatriz del cilindro y una línea igual al perímetro de la figura rectilínea que es la base del prisma*].

61. Heiberg justifica este aserto de la manera siguiente: KTΔ : ZΛP = TΔ ZP = $T\Delta^2 : H^2$; pero TΔ es igual al radio del círculo A, y H es el radio del círculo B.

62. [*Ya que la figura rectilínea circunscrita al círculo B guarda con la inscrita una razón menor que el círculo B con la superficie del cilindro, y lo mismo tomando la proporción en alternancia, y que la figura circunscrita en torno al círculo B es mayor que el círculo B, entonces la figura inscrita en el círculo B es mayor que la superficie del cilindro; luego también mayor que la superficie del prisma*].

circunscribir otro semejante al inscrito de manera que el circunscrito guarde con el inscrito una razón menor que la que guarda la superficie del cono con el círculo B [Prop. 5]. Considérese también circunscrito al círculo A un polígono semejante al circunscrito al círculo B, y sobre el polígono circunscrito al círculo A constrúyase una pirámide que tenga el mismo vértice que el cono.



Puesto que los polígonos circunscritos a los círculos A, B son semejantes, guardan entre sí la misma razón que los cuadrados de los radios entre sí —esto es, la que guardan los cuadrados de lado Γ y lado E; esto es, la razón de Γ a Δ en longitud [*Elem.* VI 20, corol. 2]—. Y la razón que guarda en longitud Γ con Δ es la que guarda el polígono circunscrito al círculo A con la superficie de la pirámide circunscrita al cono,[63] luego la figura rectilínea en torno al círculo A guarda con la figura rectilínea en torno al círculo B la misma razón que esa misma figura rectilínea[64] con la superficie de la pirámide circunscrita al cono; de manera que la superficie de la pirámide es igual a la figura rectilínea circunscrita al círculo B [*Elem.* V 9]. Puesto que la figura rectilínea circunscrita al círculo B guarda con la inscrita una razón menor que la superficie del cono con el círculo B, la superficie de la pirámide circunscrita al cono guardará con la figura rectilínea inscrita en el círculo B una razón menor que la superficie del cono con el círculo B. Lo cual es imposible.[65]

Luego el círculo B no será menor que la superficie del cono.

Y afirmo que tampoco será mayor.

Pues si es posible, sea mayor.

De nuevo considérese un polígono inscrito en el círculo B y otro circunscrito, de manera que el circunscrito guarde con el inscrito una razón menor que la que guarda el círculo B con la superficie del cono [Prop. 5], y considérese inscrito en el círculo A un polígono semejante al inscrito en el círculo B, y constrúyase sobre él una pirámide que tenga el mismo vértice que el cono.

Puesto que los polígonos inscritos en los círculos A, B son semejantes, guardarán entre sí la misma razón que la que guardan los cuadrados de los radios entre sí [*Elem.* XII 1]. Entonces el polígono guarda con el polígono la misma razón que Γ con Δ en longitud

63. [*Pues Γ es igual a la perpendicular desde el centro hasta un lado del polígono y Δ es igual a la generatriz del cono; altura común, el perímetro del polígono frente a la mitad de las superficies*].

El texto de la glosa es oscuro, aunque se comprende bien su intención; es evidente que cada una de las figuras en cuestión es igual a un triángulo cuya base fuera el perímetro del polígono, y cuyas alturas serían, respectivamente, Γ para el polígono y Δ para la pirámide; en aplicación de *Elem.* VI 1: «Los triángulos y los paralelogramos que tienen la misma altura son entre sí como sus bases», la relación entre el polígono circunscrito y la superficie lateral de la pirámide es la de Γ : Δ.

64. Es decir, «la figura circunscrita a A».

65. [*Pues se ha demostrado que la superficie de la pirámide es mayor que la superficie del cono, mientras que la figura rectilínea inscrita en el círculo B será menor que el círculo B*].

[*Elem.* VI 20, corol. 2]. Y Γ guarda con Δ una razón mayor que el polígono inscrito en el círculo A con la superficie de la pirámide inscrita en el cono.[66] Luego el polígono inscrito en el círculo A guarda con el polígono[67] inscrito en el círculo B una razón mayor que ese mismo polígono con la superficie de la pirámide. Luego la superficie de la pirámide es mayor que el polígono inscrito en el círculo B. Y el polígono circunscrito al círculo B guarda con el inscrito una razón menor que el círculo B con la superficie del cono. Luego con más razón el polígono circunscrito al círculo B guarda con la superficie de la pirámide inscrita en el cono una razón menor que el círculo B con la superficie del cono. Lo cual es imposible.[68]

Luego el círculo tampoco es mayor que la superficie del cono. Y se había demostrado que tampoco era menor; luego es igual.

PROPOSICIÓN 15

La superficie de todo cono isósceles guarda con la base la misma razón que la generatriz del cono con el radio de la base del cono.

Sea un cono isósceles cuya base es el círculo A, y sea B igual al radio de A y Γ igual a la generatriz del cono.

Se ha de demostrar que la superficie del cono guarda con el círculo A la misma razón que Γ con B.

Tómese E como media proporcional de B, Γ, y trácese el círculo Δ de radio igual a E. Entonces el círculo Δ es igual a la superficie del cono [Prop. 14].[69] Y se había demostrado que el círculo Δ guarda con el círculo A la misma razón que Γ con B en longitud.

Así que es evidente que la superficie del cono guarda con el círculo A la misma razón que Γ con B en longitud.[70]

PROPOSICIÓN 16

Si un cono isósceles es cortado por un plano paralelo a la base, la superficie del cono comprendida entre los planos paralelos es igual a un círculo cuyo radio es media proporcional entre la (porción de) generatriz del cono situada entre los planos paralelos y una recta igual a la suma de los radios de los círculos situados en los planos paralelos.

66. [*Pues el radio del círculo A guarda con la generatriz del cono una razón mayor que la que guarda la perpendicular trazada desde el centro hasta un lado del polígono con la perpendicular trazada desde el vértice del cono hasta un lado del polígono*]. Esta parte del texto coincide de modo prácticamente literal con el principio del comentario de EUT., 32.

67. Es decir, «el inscrito en el círculo A».

68. [*Pues el polígono circunscrito es mayor que el círculo B, mientras que la superficie de la pirámide inscrita en el cono es menor que la superficie del cono*].

69. [*Esto quedó demostrado en la proposición anterior*].

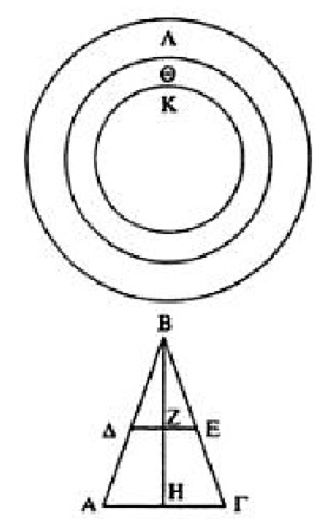
70. [*Cada una de las razones es la misma que guardan E y B en cuadrado por ser los círculos entre sí como los cuadrados de sus diámetros entre sí (Elem.* XII 2) *y, de manera semejante, también los cuadrados de los radios de los círculos; pues si lo son los diámetros, también sus mitades, es decir, los radios; y B, E son iguales a los radios*].

Sea un cono en el que el triángulo que pasa por el eje sea igual a ΑΒΓ, y sea cortado por un plano paralelo a la base y produzca como sección ΔΕ, y sea ΒΗ el eje del cono; y póngase un círculo cuyo radio sea media proporcional de ΑΔ y de la suma de ΔΖ, ΗΑ: sea el círculo Θ.

Digo que el círculo Θ es igual a la superficie del cono comprendida entre ΔΕ, ΑΓ.

Trácense los círculos Λ, Κ, y sea el cuadrado del radio del círculo Κ equivalente al rectángulo comprendido por ΒΔΖ, y sea el cuadrado del radio de Λ equivalente al rectángulo comprendido por ΒΑΗ.

Entonces el círculo Λ es igual a la superficie del cono ΑΒΓ, y el círculo Κ es igual a la superficie del cono ΔΕΒ [Prop. 14]. Y puesto que el rectángulo comprendido por ΒΑ, ΑΗ es igual al comprendido por ΒΑ, ΔΖ más el comprendido por ΑΔ y la suma de ΔΖ, ΑΗ —ya que ΔΖ es paralela a ΑΗ—[71] mientras que el rectángulo comprendido por ΑΒ, ΑΗ equivale al cuadrado del radio del círculo Λ y el rectángulo comprendido por ΒΔ, ΔΖ equivale al cuadrado del radio del círculo Κ, y el rectángulo comprendido por ΔΑ y la suma de ΔΖ, ΑΗ equivale al cuadrado del radio de Θ [por hipót.], entonces el cuadrado del radio del círculo Λ es igual a la suma de los cuadrados de los radios de los círculos Κ, Θ. De manera que también el círculo Λ es igual a la suma de los círculos Κ, Θ. Pero el círculo Λ es igual a la superficie del cono ΒΑΓ, mientras que el círculo Κ es igual a la superficie del cono ΔΒΕ.



Luego la superficie restante del cono, la comprendida entre los planos paralelos ΔΕ, ΑΓ es igual al círculo Θ.

LEMAS[72]

1. Los conos que tienen la misma altura guardan la misma razón que las bases. Y los que tienen las mismas bases guardan la misma razón que sus alturas.[73]
2. Si un cilindro es cortado por un plano paralelo a la base, como el cilindro es al cilindro es el eje al eje.[74]
3. Los conos que tienen las mismas bases que los cilindros[75] están en la misma razón que los cilindros.
4. En los conos iguales las bases son inversamente proporcionales a las alturas. Y aquellos en los que las bases son inversamente proporcionales a las alturas son iguales.[76]

71. La demostración de este aserto se prueba, por ejemplo, en EUTOCIO, 34, 23-36, 7.

72. Al igual que la glosa anterior, los lemas figuran en C y en los mss. derivados de A, pero faltaban en B, en donde Moerbeke los añadió como nota marginal haciendo constar que los tomaba de otro ejemplar. Una mano distinta de la suya anotó que se trataba de enunciados demostrados por Euclides. La numeración no figura en los mss., sino que es debida a Torelli.

73. *Elem.* XII 11 y *Elem.* XII 14.

74. *Elem.* XII 13.

75. La demostración no figura en Euclides, pero puede deducirse de *Elem.* XII 10. Por otro lado, el sentido exige la restitución de las palabras «y las mismas alturas».

76. *Elem.* XII 15.

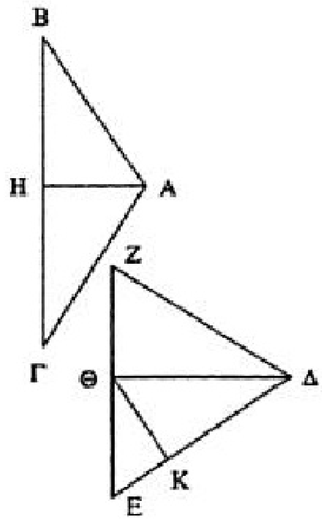
5. Los conos en los que los diámetros de sus bases guardan la misma razón que los ejes,[77] guardan entre sí una razón que es el cubo de la de los diámetros de sus bases.[78]

Todo esto fue demostrado por los antiguos.

PROPOSICIÓN 17

Si hay dos conos isósceles y la superficie de un cono es igual a la base del otro y la perpendicular trazada desde el centro de la base hasta la generatriz del cono es igual a la altura, los conos serán iguales.

Sean ΑΒΓ, ΔΕΖ dos conos isósceles y sea la base de ΑΒΓ igual a la superficie de ΔΕΖ, y sea la altura ΑΗ igual a ΚΘ, la perpendicular trazada desde el centro de la base Θ, hasta una generatriz del cono, como ΔΕ.



Digo que los conos son iguales.

Puesto que la base de ΑΒΓ es igual a la superficie de ΔΕΖ,[79] entonces la base de ΒΑΓ es a la base de ΔΕΖ como la superficie de ΔΕΖ a la base de ΔΕΖ [*Elem.* V 7]. Pero la superficie es a su propia base como ΔΘ a ΘΚ.[80] Y ΘΚ es igual a ΑΗ. Luego la base de ΒΑΓ es a la base de ΔΕΖ como la altura de ΔΕΖ a la altura de ΑΒΓ. Luego las bases de ΑΒΓ, ΔΕΖ son inversamente proporcionales a las alturas.

Luego el cono ΒΑΓ es igual al ΔΕΖ [Lema 4, 74, 6-8].

PROPOSICIÓN 18

Todo rombo[81] *compuesto por conos isósceles es igual a un cono que tenga la base igual a la superficie de uno de los conos que contienen el rombo y la altura igual a la perpendicular trazada desde el vértice del otro cono hasta la generatriz del primer cono.*

Sea ΑΒΓΔ un rombo compuesto por conos isósceles cuya base sea el círculo de diámetro ΒΓ, y su altura ΑΔ y constrúyase otro cono ΗΘΚ que tenga la base igual a la superficie del cono ΑΒΓ y la altura igual a la perpendicular trazada desde el punto Δ hasta la recta ΑΒ o hasta la recta trazada como prolongación de ella y sea ΔΖ, y sea ΘΛ la altura del cono ΘΗΚ. Y ΘΛ es igual a ΔΖ.

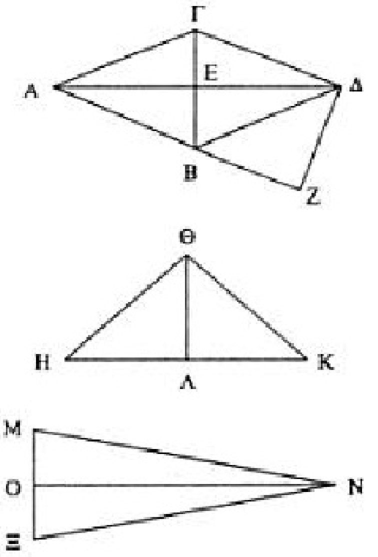
77. [*Es decir, que las alturas*].

78. *Elem.* XII 12 y cf. XI def. 24.

79. [*Y las magnitudes iguales guardan con lo mismo la misma razón*].

80. [*Pues esto se había demostrado* (Prop. 15), *que la superficie de todo cono isósceles guarda con su base la misma razón que la generatriz del cono con el radio de la base, es decir, son como ΔΕ a ΕΘ. Y ΕΔ es a ΘΔ como ΕΘ a ΘΚ, pues los triángulos son equiángulos* (*Elem.* VI 4)].

81. «Rombo sólido», se entiende; véase def. 6.



Digo que el cono[82] es igual al rombo.

Pongamos otro cono MNΞ que tenga la base igual a la base del cono ABΓ y la altura igual a AΔ, y sea su altura NO.

Puesto que la recta NO es igual a AΔ, entonces NO es a ΔE como AΔ es a ΔE [*Elem.* V 7]. Pero AΔ es a ΔE como el rombo ABΓΔ es al cono BΓΔ y NO es a ΔE como el cono MNΞ al cono BΓΔ. Por tanto, el cono MNΞ es al cono BΓΔ como el rombo ABΓΔ al cono BΓΔ.[83] Luego MNΞ es igual al rombo ABΓΔ [*Elem.* V 9]. Y puesto que la superficie de ABΓ es igual a la base de HΘK, entonces la superficie de ABΓ es a su propia base como la base de HΘK es a la base de MNΞ.[84] Y la superficie de ABΓ es a su propia base como AB es a BE [Prop. 15], es decir, como AΔ es a ΔZ.[85] Luego la base de HΘK es a la base de MNΞ como AΔ es a ΔZ. Y AΔ es igual a NO,[86] y ΔZ a ΘΛ [por hipót.]. Luego la base de HΘK es a la base de MNΞ como la altura NO es a la altura ΘΛ. Luego las bases de los conos HΘK, MNΞ son inversamente proporcionales a sus alturas; luego los conos son iguales [Lema 4 (74, 6-8)]. Y se había demostrado que MNΞ es igual al rombo ABΓΔ.

Luego también el cono HΘK es igual al rombo ABΓΔ.

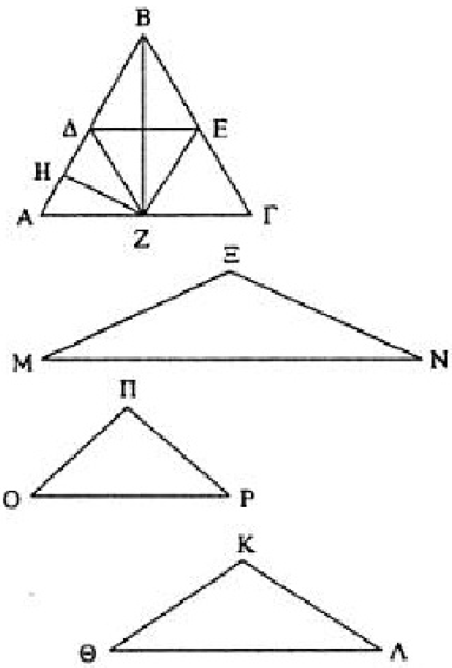
PROPOSICIÓN 19

Si se corta un cono isósceles mediante un plano paralelo a la base y sobre el círculo resultante se construye un cono que tenga por vértice el centro de la base y del cono entero se resta el rombo resultante, la figura circundante[87] será igual a un cono que tenga

82. Se entiende: «el como HΘK».
83. [*Por ser sus bases iguales*].
84. [*Pues la base de ABΓ es igual a la base de MNΞ*].
85. [*Pues son triángulos semejantes*].
86. [*Pues se había supuesto*].
87. En gr., *perileimma;* MUGLER (*Dictionnaire historique de la terminologie géométrique des grecs*, París, Klincksieck, 1958-1959, art. περίλειμμα) explica: «Nombre por el cual Arquímedes designa lo que queda de una figura, plana o en el espacio, tras la sustracción de otra o varias otras figuras».

su base igual a la superficie del cono que queda entre los planos paralelos y la altura igual a la perpendicular trazada desde el centro de la base hasta una generatriz del cono.[88]

Sea ABΓ un cono isósceles y sea cortado mediante un plano paralelo a la base y produzca como sección ΔE, y sea Z el centro de la base, y sobre el círculo de diámetro ΔE constrúyase un cono que tenga Z por vértice. Así, BΔZE será un rombo compuesto por conos isósceles. Constrúyase un cono KΘΛ cuya base sea igual a la superficie que queda entre ΔE, AΓ y su altura, una vez trazada ZH perpendicular desde el punto Z hasta AB, sea igual a ZH.



Digo que si se considera restado el rombo BΔZE del cono ABΓ, la figura circundante será igual al cono ΘΚΛ.

Pónganse dos conos MNΞ, OΠP de modo que la base de MNΞ sea igual a la superficie del cono ABΓ y la altura igual a ZH,[89] y la base del cono OΠP sea igual a la superficie del cono ΔBE y la altura igual a ZH.[90]

Puesto que la superficie del cono ABΓ se compone de la superficie del cono ΔBE más la superficie que queda entre ΔE, AΓ y la superficie del cono ABΓ es igual a la base del cono MNΞ, mientras que la superficie del cono ΔBE es igual a la base del cono OΠP, y la superficie que queda entre ΔE, AΓ es igual a la base de ΘΚΛ [por hipót.], entonces la base de MNΞ es igual a la suma de las bases de los conos ΘΚΛ, OΠP. Y los conos tienen la misma altura; luego el cono MNΞ es igual a la suma de los conos ΘΚΛ, OΠP. Pero el cono MNΞ es igual al cono ABΓ [Prop. 17], y el cono ΠOP al rombo BΔEZ [Prop. 18].

Luego el cono restante ΘΚΛ es igual a la figura circundante.

88. «Del cono primero», hemos de entender a la luz de lo que se dice en la descripción de la figura.

89. [*Por eso precisamente el cono MNΞ es igual al cono ABΓ; pues si hubiera dos conos isósceles y la superficie de un cono fuera igual a la base del otro —y además la perpendicular trazada desde el centro de la base hasta la generatriz del cono fuera igual a la altura, los conos serían iguales* (Prop. 17)].

90. [*Por eso precisamente el cono OΠP es igual al rombo BΔZH. Pues esto se había demostrado previamente* (Prop. 17)].

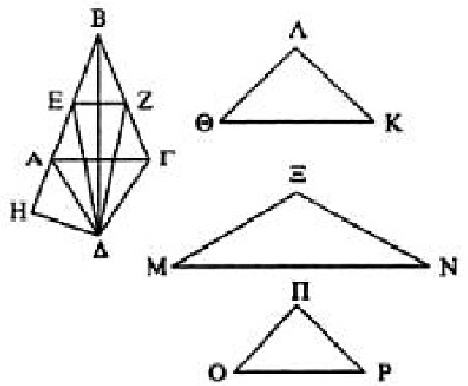
PROPOSICIÓN 20

Si en un rombo compuesto por conos isósceles se corta uno de los conos mediante un plano paralelo a la base y sobre el círculo resultante se construye un cono que tenga por vértice el mismo que el otro cono, y del rombo entero se resta el rombo resultante, la figura circundante es igual a un cono que tenga su base igual a la superficie del (tronco de) cono que queda entre los planos paralelos y la altura igual a la perpendicular trazada desde el vértice de un cono hasta la generatriz del otro cono.

Sea ΑΒΓΔ un rombo compuesto por conos isósceles y córtese uno de los conos mediante un plano paralelo a la base, y produzca como sección ΕΖ, y sobre el círculo de diámetro ΕΖ constrúyase un cono que tenga por vértice el punto Δ. Habrá resultado el rombo ΕΒΔΖ; considérese (éste) quitado del rombo entero, y póngase un cono ΘΚΛ que tenga la base igual a la superficie que queda entre ΑΓ, ΕΖ y la altura igual a la perpendicular trazada desde el punto Δ hasta ΒΑ o hasta la recta prolongación de ella.

Digo que el cono ΘΚΛ es igual a la figura circundante indicada.

Constrúyanse dos conos ΜΝΞ, ΟΠΡ y sea la base del cono ΜΝΞ igual a la superficie del cono ΑΒΓ y su altura igual a ΔΗ,[91] y sea la base del cono ΟΠΡ igual a la superficie del cono ΕΒΖ y la altura igual a ΔΗ.[92]



Puesto que igualmente [Prop. 19] la superficie del cono ΑΒΓ se compone de la de ΕΒΖ más la que queda entre los planos ΕΖ, ΑΓ, mientras que la superficie del cono ΑΒΓ es igual a la base de ΜΝΞ y la superficie del cono ΕΒΖ es igual a la base del cono ΟΡΠ, y la superficie que queda entre los planos ΕΖ, ΑΓ es igual a la base del cono ΘΚΛ, entonces la base de ΜΝΞ es igual a la suma de las bases de ΟΠΡ, ΘΚΛ. Y los conos tienen la misma altura; luego el cono ΜΝΞ es igual a la suma de los conos ΘΚΛ, ΟΠΡ. Pero el cono ΜΝΞ es igual al rombo ΑΒΓΔ [Prop. 18], y el cono ΟΠΡ es igual al rombo ΕΒΔΖ [Prop. 18].[93]

Luego el cono restante ΘΚΛ es igual a la figura circundante.

91. [*Por lo ya demostrado* (Prop. 18), *el cono ΜΝΞ es igual al rombo ΑΒΓΔ*].

92. [*De la misma manera* (Prop. 18), *el cono ΟΠΡ es igual al rombo ΕΒΔΖ*].

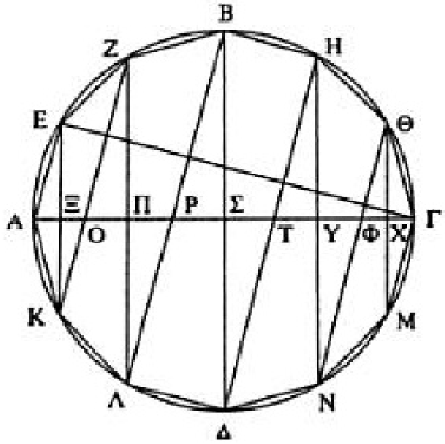
93. Heiberg completa el razonamiento indicando que ΑΒΓ = ΘΚΛ + ΕΒΔΖ, y que restando de ambos miembros el rombo ΕΒΔΖ se obtiene la tesis propuesta.

PROPOSICIÓN 21

Si en un círculo se inscribe un polígono equilátero de número par de lados y se trazan rectas que unan los lados[94] *del polígono de manera que éstas sean paralelas a una cualquiera de las rectas que subtienden dos lados del polígono, la suma de todas las rectas de unión guarda con el diámetro del círculo la misma razón que guarda la que subtiende la mitad de los lados menos uno con el lado del polígono.*

Sea ΑΒΓΔ un círculo e inscríbase en él un polígono ΑΕΖΒΗΘΓΜΝΔΛΚ, y trácense las rectas ΕΚ, ΖΛ, ΒΔ, ΗΝ, ΘΜ; es evidente que son paralelas a la que subtiende dos lados del polígono.[95]

Digo que la suma de todas las rectas indicadas guarda con el diámetro ΑΓ del círculo la misma razón que ΓΕ con ΕΑ.



Trácense las rectas ΖΚ, ΛΒ, ΗΔ, ΘΝ. Entonces, ΖΚ es paralela a ΕΑ; ΒΛ paralela a ΖΚ, y también ΔΗ paralela a ΒΛ, ΘΝ paralela a ΔΗ, ΓΜ paralela a ΘΝ.[96] Por tanto, ΕΞ es a ΞΑ como ΚΞ es a ΞΟ [*Elem.* VI 4]. Y ΚΞ es a ΞΟ como ΖΠ es a ΠΟ [*id.*]; y ΖΠ es a ΠΟ como ΛΠ es a ΠΡ [*id.*]; y ΛΠ es a ΠΡ como ΒΣ es a ΣΡ [*id.*] y, además, ΒΣ es a ΣΡ como ΔΣ es a ΕΣ [*id.*]; y ΔΣ es a ΣΤ como ΗΥ es a ΥΤ [*id.*]; y además, ΗΥ es a ΥΤ como ΝΥ es a ΥΦ; y ΝΥ es a ΥΦ como ΘΧ es a ΧΦ y además ΘΧ es a ΧΦ como ΜΧ es a ΧΓ [*id.*].[97] Luego ΕΞ es a ΞΑ como la suma de ΕΚ, ΖΛ, ΒΔ, ΗΝ, ΘΜ es al diámetro ΑΓ [*Elem.* V 12]. Y, por otro lado, ΕΞ es a ΞΑ como ΓΕ es a ΕΑ.

Luego también ΓΕ será a ΕΑ como la suma de ΕΚ, ΖΛ, ΒΔ, ΗΝ, ΘΜ es al diámetro ΑΓ.

PROPOSICIÓN 22

Si en un segmento de círculo se inscribe un polígono cuyos lados excepto la base sean iguales y en número par, y se trazan rectas paralelas a la base del segmento que unan

94. Según conjetura Heiberg, el texto de Arquímedes debía de decir «ángulos» en vez de «lados».

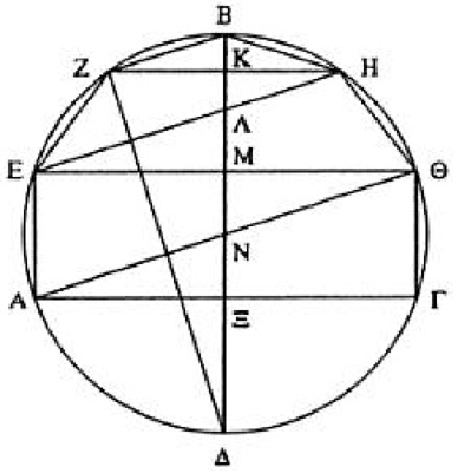
95. Puesto que los arcos ΚΑ, ΕΖ son iguales, también son iguales los ángulos ΕΚΖ, ΚΖΑ (*Elem.* III 27), y por tanto ΕΚ y ΑΖ son paralelas. El mismo razonamiento se utilizará también más adelante y en la proposición 22.

96. [*Y puesto que ΕΖ y ΚΖ son dos paralelas y ΕΚ y ΑΟ son dos rectas que las atraviesan*].

97. [*Y por tanto la suma de todas es a la suma de todas como una es a una en la razón*].

los lados del polígono, la suma de todas las rectas trazadas más la mitad de la base guarda con la altura del segmento la misma razón que la recta trazada para unir el diámetro[98] *del círculo y el lado del polígono con el lado del polígono.*

En el círculo ΑΒΓΔ trácese una recta ΑΓ y sobre ΑΓ en el segmento ΑΒΓ inscríbase un polígono de número par de lados y que tenga los lados iguales salvo la base ΑΓ, y trácense las rectas ΖΗ, ΕΘ, que sean paralelas a la base del segmento.



Digo que la suma de ΖΗ, ΕΘ, ΑΞ es a ΒΞ como ΔΖ es a ΖΒ.

Tracemos de nuevo del mismo modo[99] las rectas ΗΕ, ΑΘ.

Entonces son paralelas a ΒΖ;[100] por el mismo razonamiento[101] ΚΖ es a ΚΒ como ΗΚ es a ΚΛ, y como ΕΜ es a ΜΛ y como ΜΘ es a ΜΝ y como ΞΑ es a ΞΝ.[102] Luego la suma de ΖΗ, ΕΘ, ΑΞ es a ΒΞ como ΖΚ es a ΚΒ [*Elem.* V 12]. Y ΖΚ es a ΚΒ como ΔΖ es a ΖΒ [*Elem.* VI 4].

Luego ΔΖ es a ΖΒ como la suma de ΖΗ, ΕΘ, ΑΞ es a ΒΞ.

PROPOSICIÓN 23[103]

Sea ΑΒΓΔ un círculo máximo en la esfera e inscríbase en él un polígono equilátero y sea múltiplo de cuatro el número de sus lados y sean ΑΓ, ΔΒ diámetros suyos.[104]

Si, permaneciendo fijo el diámetro ΑΓ, se hace girar en tomo suyo el círculo ΑΒΓΔ que contiene al polígono, es evidente que su circunferencia habrá sido transportada por la superficie de la esfera y que los ángulos del polígono, excepto los de vértice en los

98. Como se ve en la figura, se refiere «al extremo del diámetro exterior al segmento».

99. «Del mismo modo que en la proposición anterior», se entiende.

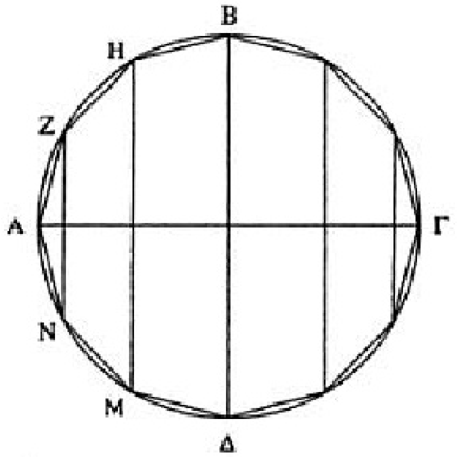
100. Cf. n. 95 a la prop. 21.

101. El mismo que en la proposición anterior.

102. [*Y por tanto la suma de todas es a la suma de todas como una es a una en la razón*].

103. En los mss. falta el enunciado. Stamatis, en « Αρχιμήδεια I», Πλάτων 19 (1967), 151, lo restituye así: «Si en un círculo máximo de la esfera se inscribe un polígono equilátero y equiángulo cuyo número de lados sea múltiplo de cuatro, y si, permaneciendo fijo el diámetro del círculo que contiene el polígono se hace girar a éste hasta que vuelva a la misma posición desde la que empezó a moverse, la superficie de la figura inscrita en la esfera será menor que la superficie de la esfera».

104. «Perpendiculares entre sí» necesariamente, según se deduce de lo espuesto a continuación.



puntos A, Γ, se habrán desplazado por la superficie de la esfera siguiendo circunferencias que describen círculos perpendiculares al círculo ΑΒΓΔ. Y las rectas que unen los ángulos del polígono, que son paralelas a ΒΔ, serán sus diámetros. Los lados del polígono se habrán desplazado describiendo unos conos:[105] los lados AZ, AN por la superficie del cono cuya base es el círculo de diámetro ZN y su vértice el punto A; los lados ZH, MN se habrán desplazado según una superficie cónica cuya base es el círculo de diámetro MH y su vértice el punto en el que, una vez prolongadas ZH, MN, coinciden entre sí y con ΑΓ; y los lados BH, ΜΔ se habrán desplazado según una superficie cónica cuya base es el círculo de diámetro ΒΔ, perpendicular al círculo ΑΒΓΔ, y su vértice el punto en el que una vez prolongadas BH, ΜΔ, coinciden entre sí y con ΓΑ. De manera semejante, también los lados que hay en el otro semicírculo se habrán desplazado según superficies cónicas semejantes, a su vez, a éstas. Y habrá quedado inscrita en la esfera una figura contenida por las superficies cónicas recién indicadas, cuya superficie será menor que la superficie de la esfera.

Pues una vez dividida la esfera por el plano correspondiente a ΒΔ, perpendicular al círculo ΑΒΓΔ, la superficie de un hemisferio y la superficie de la figura inscrita en él tienen los mismos límites en un solo plano, ya que la circunferencia del círculo de diámetro ΒΔ, perpendicular al círculo ΑΒΓΔ, es límite de ambas superficies. Y las dos son cóncavas hacia el mismo lado, y una de ellas está comprendida por la otra superficie y el plano que tiene los mismos límites que ella. Del mismo modo, también la superficie de la figura inscrita en el otro hemisferio es menor que la superficie del hemisferio.

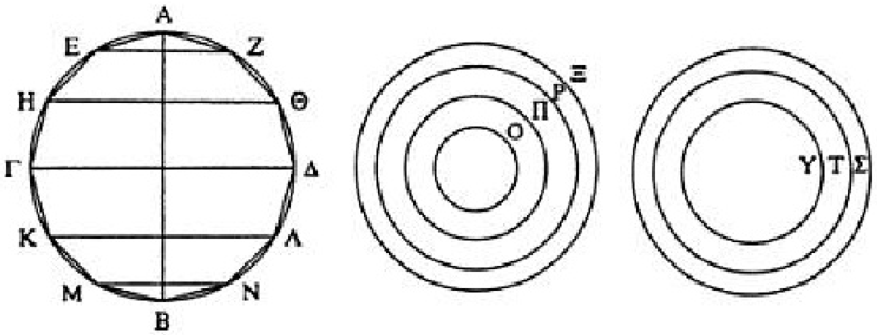
Y por tanto la superficie entera de la figura inscrita en la esfera es menor que la superficie de la esfera.

PROPOSICIÓN 24

La superficie de la figura inscrita en la esfera es igual a un círculo tal que el cuadrado de su radio equivale al rectángulo comprendido por el lado de la figura y una recta igual a la suma de las rectas que unen los lados[106] del polígono y que son paralelas a la recta que subtiende dos lados del polígono.

105. En realidad, describen superficies cónicas, pero unas lo son de conos y otras de troncos de cono.
106. Debería decir «ángulos», como ocurría más atrás, Prop. 21.

Sea ΑΒΓΔ un círculo máximo de la esfera, y en él inscríbase un polígono equilátero cuyo número de lados sea múltiplo de cuatro, y a partir del polígono inscrito considérese inscrita en la esfera una figura[107] y trácense las rectas ΕΖ, ΗΘ, ΓΛ, ΚΛ, ΜΝ que sean paralelas a la recta que subtiende dos lados y póngase un círculo Ξ el cuadrado de cuyo radio equivalga al rectángulo comprendido por ΑΕ y una recta igual a la suma de ΕΖ, ΗΘ, ΓΔ, ΚΛ, ΜΝ.



Digo que ese círculo es igual a la superficie de la figura inscrita en la esfera.

Pónganse los círculos Ο, Π, Ρ, Σ, Τ, Υ y equivalga el cuadrado del radio de Ο al rectángulo comprendido por ΕΑ y la mitad de ΕΖ; y equivalga el cuadrado del radio de Π al rectángulo comprendido por ΕΑ y la mitad de la suma de ΕΖ, ΗΘ; y equivalga el cuadrado del radio de Ρ al rectángulo comprendido por ΕΑ y la mitad de la suma de ΗΘ, ΓΔ; y equivalga el cuadrado del radio de Σ al rectángulo comprendido por ΕΑ y la mitad de la suma de ΓΔ, ΚΛ; y equivalga el cuadrado del radio de Τ al rectángulo comprendido por ΑΕ y la mitad de la suma de ΚΛ, ΜΝ; y equivalga el cuadrado del radio de Υ al rectángulo comprendido por ΑΕ y la mitad de ΜΝ.

Por ello el círculo Ο es igual a la superficie del cono ΑΕΖ [Prop. 14]; el Π, a la superficie cónica que queda entre ΕΖ, ΗΘ [Prop. 16]; el Ρ, a la que queda entre ΗΘ, ΓΔ [*id.*] el Σ, a la que queda entre ΓΔ, ΚΛ [*id.*] y, además, el Τ es igual a la superficie cónica que queda entre ΚΛ, ΜΝ [*id.*]; y el Υ es igual a la superficie de cono ΜΒΝ [Prop. 14]. Luego la suma de todos los círculos es igual a la superficie de la figura inscrita.

Y es evidente que la suma de los cuadrados de los radios de Ο, Π, Ρ, Σ, Τ, Υ equivale al rectángulo comprendido por ΑΕ y dos veces la suma de las mitades de ΕΖ, ΗΘ, ΓΔ, ΚΛ, ΜΝ, que es la suma de ΕΖ, ΗΘ, ΓΔ, ΚΛ, ΜΝ enteras. Luego la suma de los cuadrados de los radios de los círculos Ο, Π, Ρ, Σ, Τ, Υ equivale al rectángulo comprendido por ΑΕ y la suma de todas las rectas ΕΖ, ΗΘ, ΓΔ, ΚΛ, ΜΝ [por hipót.]. Pero también el cuadrado del radio del círculo Ξ equivale al rectángulo comprendido por ΑΕ y la recta compuesta por todas las rectas ΕΖ, ΗΘ, ΓΔ, ΚΛ, ΜΝ; luego el cuadrado del radio del círculo Ξ equivale a la suma de los cuadrados de los radios de Ο, Π, Ρ, Σ, Τ, Υ. Luego el círculo Ξ es igual a la suma de los círculos Ο, Π, Ρ, Σ, Τ, Υ. Y se había demostrado que la suma de los círculos Ο, Π, Ρ, Σ, Τ, Υ era igual a la superficie de la figura mencionada.

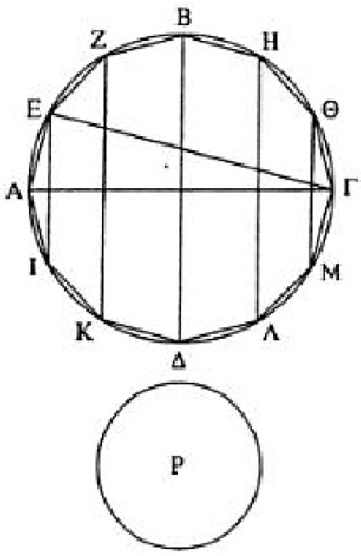
Luego el círculo Ξ será también igual a la superficie de la figura.

107. La figura inscrita estaría compuesta por el cono ΑΕΖ y los troncos de cono ΕΖΗΘ, ΗΘΓΑ, etc.

PROPOSICIÓN 25

La superficie de la figura inscrita en la esfera comprendida por superficies cónicas es menor que el cuádruplo del círculo máximo de los de la esfera.

Sea ΑΒΓΔ un círculo máximo en la esfera, e inscríbase en él un polígono[108] equilátero cuyo número de lados sea múltiplo de cuatro, y a partir de él considérese una superficie comprendida por superficies cónicas.



Digo que la superficie de la figura inscrita es menor que el cuádruple del círculo máximo de los de la esfera.

Trácense las rectas ΕΙ, ΘΜ que subtienden dos lados del polígono y, paralelas a éstas, las rectas ΖΚ, ΔΒ, ΗΛ, y póngase un círculo Ρ el cuadrado de cuyo radio equivalga al rectángulo comprendido por ΕΑ y una recta igual a la suma de ΕΙ, ΖΚ, ΒΔ, ΗΛ, ΘΜ.

Por lo demostrado anteriormente [Prop. 24], el círculo es igual a la superficie de la figura mencionada. Y puesto que se había demostrado que la recta igual a la suma de ΕΙ, ΖΚ, ΒΔ, ΗΛ, ΘΜ es a ΑΓ —el diámetro del círculo— como ΓΕ a ΕΑ [Prop. 21], entonces el rectángulo comprendido por una recta igual a la suma de las rectas mencionadas y ΕΑ —es decir, el cuadrado del radio del círculo Ρ [por hipót.]— es igual al rectángulo comprendido por ΑΓ, ΓΕ [*Elem.* VI 16].

Pero el rectángulo comprendido por ΑΓ, ΓΕ es menor que el cuadrado de ΑΓ [*Elem.* III 15]; luego el cuadrado del radio de Ρ es menor que el cuadrado de ΑΓ.[109] Luego el círculo Ρ es menor que el cuádruple del círculo máximo. Y se había demostrado que el círculo Ρ era igual a la superficie de la figura mencionada.

Luego la superficie de la figura es menor que el cuádruple del círculo máximo de los de la esfera.

108. [*De número par de ángulos*].

109. [*Luego el radio de Ρ es menor que ΑΓ; de manera que el diámetro del círculo Ρ es menor que el doble del diámetro del círculo ΑΒΓΑ, y entonces dos diámetros del círculo ΑΒΓΔ son mayores que el diámetro del círculo Ρ, y el cuádruple del cuadrado del diámetro del círculo ΑΒΓΔ —es decir, ΑΓ— es mayor que el cuadrado del diámetro del círculo Ρ. Y el cuádruplo del cuadrado de lado ΑΓ es al cuadrado del diámetro del círculo Ρ como cuatro veces el círculo ΑΒΓΔ es al círculo Ρ*]. Aunque la expresión es algo farragosa, el razonamiento es correcto.

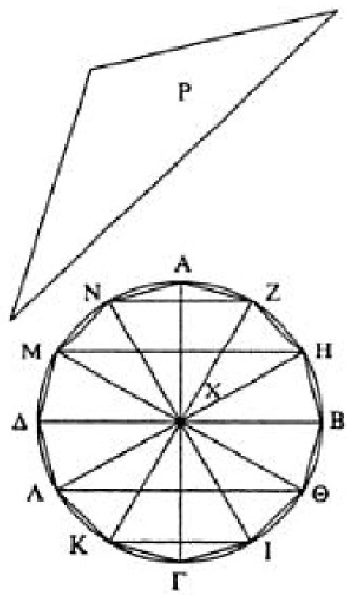
PROPOSICIÓN 26

La figura inscrita en la esfera comprendida por superficies cónicas es igual al cono que tiene por base un círculo igual a la superficie de la figura inscrita en la esfera y altura igual a la perpendicular trazada desde el centro de la esfera hasta un lado del polígono.

Sea la esfera y ΑΒΓΔ un círculo máximo en ella y lo demás igual que en la proposición anterior, y sea P un cono recto que tenga por base la superficie de la figura inscrita en la esfera y la altura igual a la perpendicular trazada desde el centro de la esfera hasta un lado del polígono.

Se ha de demostrar que el cono P es igual a la figura inscrita en la esfera.

A partir de los círculos cuyos diámetros son las rectas ZN, HM, ΘΛ, IK, constrúyanse conos que tengan por vértice el centro de la esfera.



Así, habrá un rombo sólido (compuesto) por el cono cuya base es el círculo de diámetro ZN y su vértice el punto A y por el cono cuya base es ese mismo círculo y su vértice el punto X. Es igual al cono que tiene por base la superficie del círculo NAZ y la altura igual a la perpendicular trazada desde X[110] [Prop. 18]. Además, la figura restante en torno[111] al rombo —la comprendida por la superficie cónica que queda entre los planos paralelos correspondientes a las rectas ZN, HM y las superficies de los conos ZNX y HMX— es igual al cono que tiene su base igual a la superficie cónica que queda entre los planos paralelos correspondientes a MX, ZN y la altura igual a la perpendicular trazada desde X hasta ZH. Pues eso ya se ha demostrado [Prop. 20]. Y la parte restante del cono —la comprendida por la superficie cónica que queda entre los planos paralelos correspondientes a HM, BΔ y la superficie del cono MHX y el círculo de diáme-

110. Entiéndase «la perpendicular trazada desde X hasta AZ».

111. *Gr. perileleimménon.* Participio medio del verbo *perileípō*, designa el resto de una operación de sustracción entre dos elementos geométricos (líneas, áreas o volúmenes) (Cf. MUGLER, *Dictionnaire...*, art. *perileípein*). El nombre correspondiente a este adjetivo verbal sería *períleimma;* sobre este término, cf. nota a propósito en la Prop. 19.

tro BΔ— es igual al cono que tiene su base igual a la superficie del cono que queda entre los planos correspondientes a HM, BΔ y la altura igual a la perpendicular trazada desde X hasta BH [Prop. 19].

De modo semejante, también en la otra semiesfera el rombo XKΓI y las figuras restantes en torno a los conos serán iguales a otros tantos conos de las mismas características que los conos que acabamos de describir.

Es evidente, por tanto, que también toda la figura inscrita en la esfera es igual a la suma de todos los conos indicados. Y la suma de los conos es igual al cono P, puesto que el cono P tiene una altura igual a la de cada uno de los conos dichos y la base igual a la suma de las bases de todos ellos [Lema 1 a Prop. 16].

Así que es evidente que la figura inscrita en la esfera es igual al cono propuesto.

PROPOSICIÓN 27

La figura inscrita en la esfera comprendida por superficies cónicas es menor que el cuádruple del cono que tiene su base igual al círculo máximo de los de la esfera y su altura igual al radio de la esfera.

Sea P un cono que sea igual a la figura inscrita en la esfera, que tenga la base igual a la superficie de la figura inscrita y la altura igual a la perpendicular trazada desde el centro del círculo hasta un lado del polígono inscrito [Prop. 26] y sea Ξ un cono que tenga su base igual al círculo ABΓΔ, y por altura el radio del círculo ABΓΔ.

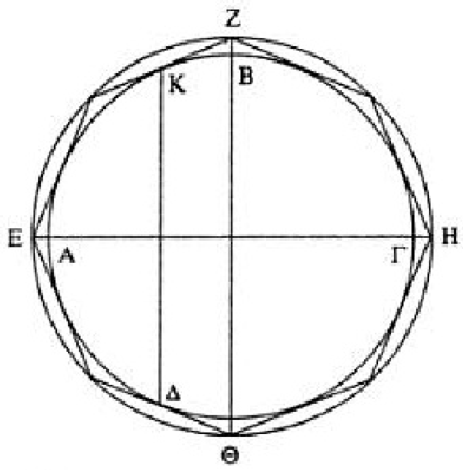
Puesto que el cono P tiene su base igual a la superficie de la figura inscrita en la esfera y su altura igual a la perpendicular trazada desde X hasta AZ y puesto que se había demostrado que la superficie de la figura inscrita es menor que el cuádruple del círculo máximo de los de la esfera [Prop. 25], entonces la base del cono P será menor que el cuádruple de la base del cono Ξ; y también la altura del cono P es menor que la altura del cono Ξ. Por tanto, puesto que el cono P tiene su base menor que el cuádruple de la base de Ξ y la altura menor que su altura, es evidente que el propio cono P es menor que el cuádruple del cono Ξ. Pero el cono P es igual a la figura inscrita [por hipót.].

Luego la figura inscrita es menor que el cuádruple del cono Ξ.

PROPOSICIÓN 28[112]

Sea en la esfera un círculo máximo ABΓΔ y en torno al círculo ABΓΔ circunscríbase un polígono equilátero y equiángulo y sea su número de lados múltiplo de cuatro y quede comprendido el polígono circunscrito al círculo por un círculo circunscrito a él con el mismo centro que ABΓΔ.

112. Como en la proposición 23, también en ésta falta el enunciado. STAMATIS —en «Ἀρχιμήδεια», *Platon* 19 (1967), 151— ha propuesto restituir el enunciado desaparecido en los siguientes términos: «Si se circunscribe a un círculo máximo de la esfera un polígono equilátero y equiángulo cuyo número de lados sea múltiplo de cuatro, y permaneciendo fijo el diámetro del círculo que contiene al polígono se le hace girar hasta que vuelva a la misma posición desde la que empezó a moverse, la superficie de la figura circunscrita a la esfera será mayor que la superficie de la esfera».



Permaneciendo fija EH, hágase girar el plano EZHΘ en el que están el polígono y el círculo. Es evidente que la circunferencia del círculo ΑΒΓΔ se desplazará según la superficie de la esfera, y que la circunferencia del EZHΘ se desplazará según la superficie de otra esfera con el mismo centro que la menor; y los puntos de contacto en los que son tangentes los lados describen en la esfera menor círculos perpendiculares al círculo ΑΒΓΔ y los ángulos del polígono —salvo los que tienen por vértice los puntos E, H— se desplazarán por la superficie de la esfera mayor según las circunferencias de círculos trazados perpendiculares al círculo EZHΘ, y los lados del polígono se desplazarán según superficies cónicas como en las proposiciones anteriores a ésta [Prop. 23-27]. Entonces, la figura comprendida por las superficies cónicas estará circunscrita a la esfera menor e inscrita en la mayor.

Que la superficie de la figura circunscrita es mayor que la superficie de la esfera se demostrará así:

Sea la recta ΚΔ el diámetro de un círculo de los de la esfera menor, siendo K, Δ los puntos en los que los lados del polígono circunscrito son tangentes al círculo ΑΒΓΔ. Dividida la esfera mediante el plano que pasa por ΚΔ, perpendicular al círculo ΑΒΓΔ, también la superficie de la figura circunscrita a la esfera quedará cortada mediante el plano. Y es evidente que tienen los mismos límites en un plano, pues el límite de ambas figuras planas es la circunferencia del círculo de diámetro ΚΔ y perpendicular al círculo ΑΒΓΔ. Y ambas superficies son cóncavas hacia el mismo lado, y una de ellas está comprendida por la otra superficie y la de la figura plana que tiene los mismos límites. Luego la superficie comprendida del casquete de esfera es menor que la superficie de la figura circunscrita a ella [Post. 4].

De manera semejante, también la superficie del casquete restante de la esfera es menor que la superficie de la figura circunscrita a ella.

Por tanto, es evidente que también la superficie entera de la esfera es menor que la superficie de la figura circunscrita a ella.

PROPOSICIÓN 29

La superficie de la figura circunscrita a la esfera es igual a un círculo (tal que) el cuadrado de su radio equivale al rectángulo comprendido por un lado del polígono y una

recta igual a la suma de todas las que unen los ángulos del polígono y son paralelas a una de las rectas que subtienden dos lados del polígono.

La figura circunscrita a la esfera menor está inscrita en la esfera mayor.[113]

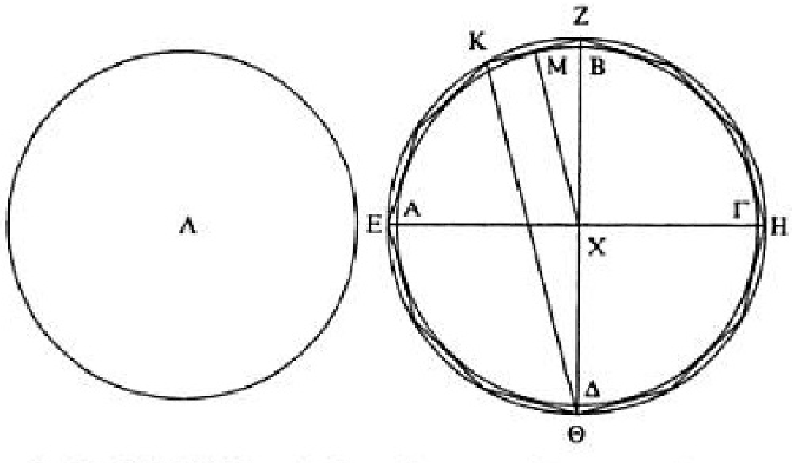
Y se ha demostrado que la superficie de la figura inscrita en la esfera comprendida por las superficies cónicas es igual a un círculo (tal que) el cuadrado de su radio equivale al rectángulo comprendido por un lado del polígono y una recta igual a la suma de todas las rectas que unen los ángulos del polígono y son paralelas a alguna de las que subtienden dos lados del polígono [Prop. 24].

Luego es evidente lo recién dicho.

PROPOSICIÓN 30

La superficie de la figura circunscrita a la esfera es mayor que el cuádruple del círculo máximo de los de la esfera.

Sean la esfera y el círculo y lo demás lo mismo que en las proposiciones anteriores, y el círculo Λ sea igual a la superficie de la figura propuesta circunscrita a la esfera menor.



Puesto que en el círculo EZHΘ se ha inscrito un polígono equilátero de número par de ángulos, la suma de las rectas que unen los lados del polígono y que son paralelas a ZΘ guardan con ZΘ la misma razón que ΘK con KZ [Prop. 21]. Por tanto, la figura comprendida por un lado del polígono y la recta igual a la suma de todas las que unen los ángulos del polígono es igual al rectángulo comprendido por ZΘK [*Elem.* VI 16].

De manera que el cuadrado del radio del círculo Λ equivale al rectángulo comprendido por ZΘK [Prop. 29]. Por tanto, el radio del círculo Λ es mayor que ΘK.[114] Y ΘK es igual al diámetro del círculo ABΓΔ.[115]

113. También en esta proposición se han producido alteraciones: ni siquiera se advierte al lector —como suele hacer Arquímedes en ocasiones semejantes— de que en esta demostración se utiliza la misma construcción que en la proposición anterior.

Sean la esfera y el círculo y lo demás lo mismo que en las proposiciones anteriores, y el círculo Λ sea igual a la superficie de la figura propuesta circunscrita a la esfera menor.

114. Ya que ZΘ > ΘK (*Elem.* III 15).

115. Heiberg secluye del texto la frase [*Porque es el doble de XM, que es el radio del círculo ABΓΔ*] que aparece en este punto del texto, ya que parece haber sido incluida en él por un copista conocedor del correspondiente *Comentario* de Eutocio (36, 22 y ss.).

Por tanto es evidente que el círculo A —es decir, la superficie de la figura circunscrita a la esfera menor— es mayor que el cuádruple del círculo máximo de los de la esfera.

PROPOSICIÓN 31

La figura circunscrita a la esfera menor es igual a un cono que tiene por base un círculo igual a la superficie de la figura y la altura igual al radio de la esfera.

La figura circunscrita a la esfera menor está inscrita en la esfera mayor. Y se ha demostrado que la figura inscrita comprendida por superficies cónicas es igual a un cono que tiene por base un círculo igual a la superficie de la figura y la altura igual a la perpendicular trazada desde el centro de la esfera hasta un lado del polígono. Y esta recta es igual al radio de la esfera menor [Prop. 26].

Luego es evidente lo propuesto.

COROLARIO

A partir de esto está claro que la figura circunscrita a la esfera menor es mayor que el cuádruple del cono que tiene por base el círculo máximo de los de la esfera y por altura el radio de la esfera.[116]

Puesto que la figura es igual a un cono que tiene su base igual a la superficie de esa figura y la altura igual[117] al radio de la esfera menor [Prop. 31], la superficie de la figura circunscrita a la esfera es mayor que el cuádruple del círculo máximo de los de la esfera [Prop. 30]; luego la figura circunscrita en torno a la esfera será mayor que el cuádruple del cono que tiene por base el círculo máximo y por altura el radio de la esfera, puesto que también el cono que es igual a ella es mayor que el cuádruple del cono dicho.[118]

PROPOSICIÓN 32

Si hay en la esfera una figura inscrita y otra circunscrita, construidas a partir de polígonos semejantes de la misma manera que en las proposiciones anteriores, la superficie de la figura circunscrita guarda con la superficie de la inscrita una razón que es el cuadrado de la que guardan el lado del polígono circunscrito al círculo máximo con el lado del polígono inscrito en el mismo círculo; y la propia figura[119] *guarda con la figura una razón que es el cubo de aquella misma razón.*

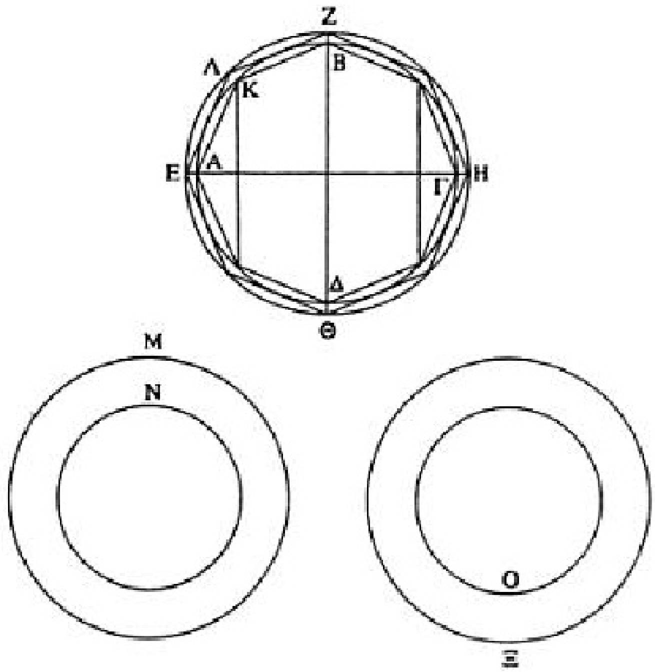
116. Heiberg, que secluye por redundantes los pasajes que recogemos en las dos notas siguientes, sospecha que se deba secluir también el texto desde este punto hasta el final del corolario argumentando que lo característico de los corolarios es, precisamente, no requerir demostración.

117. [*A la perpendicular trazada desde el centro de la esfera hasta un lado del polígono, es decir*].

118. [*Pues tiene la base mayor que el cuádruple y la misma altura*].

119. [*Circunscrita*].

Sea en la esfera el círculo ΑΒΓΔ, e inscríbase en él un polígono equilátero y sea múltiplo de cuatro su número de lados, y circunscríbase al círculo otro semejante al inscrito; y además, sean los lados del polígono circunscrito tangentes al círculo en el punto medio de los arcos cortados por los lados del polígono inscrito; y sean ΕΗ, ΖΘ diámetros mutuamente perpendiculares del círculo que comprende al polígono circunscrito y estén dispuestos de modo semejante a los diámetros ΑΓ, ΒΔ y considérese que se trazan rectas que unan los ángulos opuestos del polígono y que sean paralelas entre sí y a ΖΒΔΘ. Si, permaneciendo fijo el diámetro ΕΗ, se desplazan en torno a la circunferencia del círculo los perímetros de los polígonos, una figura estará inscrita en la esfera y la otra circunscrita.



Se ha de demostrar que la superficie de la figura circunscrita guarda con la superficie de la inscrita una razón que es el cuadrado de la razón de ΕΛ con ΑΚ, y que la figura circunscrita guarda con la inscrita una razón que es el cubo de la misma razón.

Sea el círculo Μ igual a la superficie de la figura circunscrita a la esfera y el Ν igual a la superficie de la inscrita. Entonces, el cuadrado del radio de Μ equivale al rectángulo comprendido por ΕΛ y una recta igual a la suma de todas las que unen los ángulos del polígono circunscrito [Prop. 29]; y el cuadrado del radio de Ν equivale al rectángulo comprendido por ΑΚ y una recta igual a la suma de todas las que unen los ángulos[120] [Prop. 24]. Y puesto que los polígonos son semejantes, también serían semejantes las áreas comprendidas por las líneas dichas.[121]

Por tanto es evidente que la superficie de la figura circunscrita a la esfera guarda con la superficie de la figura inscrita en la esfera una razón que es el cuadrado de la razón de ΕΛ con ΑΚ.

120. «Del polígono inscrito», se entiende.

121. [*Es decir, por las que van hasta los ángulos o los lados de los polígonos, de manera que guardan entre sí la misma razón, a saber: el cuadrado de la que guardan los lados de los polígonos. Pero también la razón que guardan los rectángulos comprendidos por las líneas indicadas es el cuadrado de la que guardan entre sí los radios de los círculos M, N; de manera que también los diámetros de M, N guardan la misma razón que los lados de los polígonos. Y los círculos que son iguales a las superficies del circunscrito y del inscrito guardan entre sí una razón que es la de los cuadrados de sus diámetros*].

Tómense dos conos O, Ξ y sea el cono Ξ, que tiene por base el círculo Ξ, igual a M, y el cono O, que tiene por base el círculo O, igual a N; y por altura tengan el cono Ξ el radio de la esfera y el cono O la perpendicular trazada desde el centro al lado AK.

Entonces, el cono Ξ es igual a la figura circunscrita a la esfera [Prop. 31] y el cono O, a la inscrita [Prop. 26].[122] Y puesto que los polígonos son semejantes [por hipót.], EΛ guarda con AK la misma razón que el radio de la esfera con la perpendicular trazada desde el centro de la esfera hasta AK. Luego la altura del cono Ξ guarda con la altura del cono O la misma razón que EΛ con AK. Por otro lado, el diámetro del círculo M guarda con el diámetro del círculo N la misma razón que guarda EΛ con AK. Luego los diámetros de las bases de los conos Ξ, O guardan la misma razón que las alturas[123] y por eso el cono Ξ guarda con el cono O una razón que es el cubo de la del diámetro del círculo M con el diámetro del círculo N [*Elem.* XII 12].

Es evidente, por tanto, que también la figura circunscrita guardará con la inscrita una razón que será el cubo de la de EΛ con AK.

PROPOSICIÓN 33

La superficie de toda esfera es el cuádruple del círculo máximo de los que hay en ella.

Haya una esfera y sea el círculo A el cuádruple de su círculo máximo.

Digo que el círculo A es igual a la superficie de la esfera.

Pues si no, o es mayor o es menor.

Sea primero mayor la superficie de la esfera que la del círculo.

La superficie de la esfera y el círculo A son dos magnitudes desiguales; entonces es posible tomar dos rectas desiguales de tal manera que la mayor guarde con la menor una razón menor que la que guarda la superficie de la esfera con el círculo [Prop. 2]. Tómense las rectas B, Γ y sea Δ media proporcional de B, Γ; y considérese la esfera cortada mediante un plano que pase por el centro según el círculo EZHΘ, y considérese en el círculo un polígono inscrito y otro circunscrito de manera que el circunscrito sea semejante al polígono inscrito y que el lado del circunscrito guarde una razón menor[124] que la que guarda B con Δ [Prop. 3].[125]

Entonces, la superficie de la figura circunscrita a la esfera guarda con la superficie de la figura inscrita una razón menor que la superficie de la esfera con el círculo A. Lo cual es imposible, pues la superficie de la figura circunscrita es mayor que la superficie de la esfera [Prop. 28], mientras que la superficie de la figura inscrita es menor que el círculo A [Prop. 25].[126]

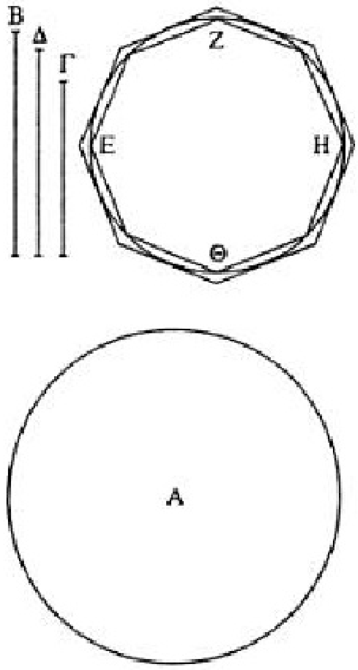
122. [*Eso ya se ha demostrado*].

123. [*Pues son semejantes*].

124. Entiéndase «guarde (con el lado del polígono inscrito) una razón menor...». La misma falta se produce repetidamente, y hemos de tomarla por omisión del transcriptor.

125. [*Y entonces el cuadrado de la razón es menor que el cuadrado de la razón. Y la razón de B a Γ es el cuadrado de la de B a Δ, y la de la superficie del sólido circunscrito con la superficie del inscrito es el cuadrado de la del lado del polígono circunscrito con el lado del inscrito*].

126. [*Pues se ha demostrado que la superficie de la inscrita es menor que el cuádruple del círculo máximo de los de la esfera, y el cuádruple del círculo máximo es el círculo A*]: la interpolación recoge lo demostrado en la Prop. 25.



Luego la superficie de la esfera no es mayor que el círculo A.

Y afirmo que tampoco es menor.

Pues si es posible, séalo.

E, igualmente, hállense las rectas B, Γ de manera que B guarde con Γ una razón menor que la que guarda el círculo A con la superficie de la esfera [Prop. 2], y sea Δ media proporcional de B, Γ; e inscríbanse y circunscríbanse de nuevo[127] de manera que la superficie del circunscrito guarde[128] una razón menor que B con Δ [Prop. 3].[129]

Por tanto, la superficie de la figura circunscrita guarda con la superficie de la inscrita una razón menor que[130] el círculo A con la superficie de la esfera. Lo cual es imposible, pues la superficie de la figura circunscrita es mayor que el círculo A [Prop. 30], y la superficie de la inscrita menor que la superficie de la esfera [Prop. 23].

Luego la superficie de la esfera no es menor que el círculo A. Y se había demostrado que tampoco era mayor. Luego la superficie de la esfera es igual al círculo A, es decir, al cuádruple del círculo máximo.

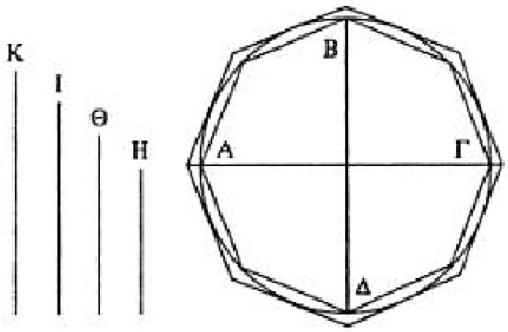
PROPOSICIÓN 34

La esfera entera es el cuádruple del cono que tiene la base igual al círculo máximo de los de la esfera y por altura el radio de la esfera.

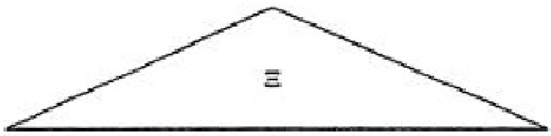
Sea una esfera y en ella el círculo máximo ΑΒΓΔ.

Si la esfera no es el cuádruple del cono indicado, sea, si es posible, mayor que el cuádruple.

127. «Polígonos semejantes», se entiende.
128. Como más atrás, entiéndase «guarde (con la superficie del inscrito) una razón menor...».
129. [*Luego también sus cuadrados*].
130. [*B con Γ. Y B guarda con Γ una razón menor que*].



Sea el cono Ξ, que tiene por base el cuádruple del círculo ΑΒΓΔ y la altura igual al radio de la esfera.



Así, la esfera es mayor que el cono Ξ. La esfera y el cono serán dos magnitudes desiguales. Entonces, es posible tomar dos rectas desiguales de manera que la mayor guarde con la menor una razón menor que la que guarda la esfera con el cono Ξ [Prop. 2]. Sean tomadas las rectas K, H y, por otro lado, las rectas I, Θ de manera que unas a otras se excedan en la misma magnitud, la recta K a la I y la I a la Θ y la Θ a la H,[131] y considérense además en el círculo ΑΒΓΔ un polígono inscrito, cuyo número de lados sea múltiplo de cuatro, y otro circunscrito semejante al inscrito, igual que en las proposiciones anteriores, y guarde el lado del polígono circunscrito con el del inscrito una razón menor que la que guarda K con I [Prop. 3], y sean ΑΓ, ΒΔ diámetros perpendiculares entre sí.

Entonces si, permaneciendo fijo el diámetro ΑΓ, se desplaza en torno a él el plano en que están los polígonos, habrá unas figuras —una inscrita en la esfera y otra circunscrita— y la circunscrita guardará con la inscrita una razón que es el cubo de la que guarda el lado del polígono circunscrito con el del inscrito en el círculo ΑΒΓΔ [Prop. 32]. Y el lado guarda[132] con el lado una razón menor que la que guarda K con I [por hipót.]. De manera que la figura circunscrita guarda una razón menor que el cubo de la razón de K con I.[133] También K guarda con H una razón mayor que el cubo de la que guarda K con I. Entonces, con mayor motivo, la figura circunscrita guarda con la inscrita una razón menor que la que guarda K con H. Y K guarda con H una razón menor que la que guarda la esfera con el cono Ξ [por hipót.]. Y lo mismo tomando la proporción en alternancia [*Elem.* V 16]: lo cual es imposible. Pues la figura circunscrita es mayor que la esfera [Prop. 28] y la inscrita menor que el cono Ξ [Prop. 27].[134]

131. «La cuestión propuesta consiste en, dadas dos rectas, hallar dos términos proporcionales en proporción aritmética» (Eur., 40, 10 y ss.).

132. Sobreentiéndase: «con la inscrita».

133. [*Esto se hace evidente mediante los lemas*].

134. [*Porque el cono Ξ es el cuádruple del cono que tiene su base igual al círculo ΑΒΓΔ y la altura igual al radio de la esfera, mientras que la figura inscrita es menor que el cuádruple de dicho cono*]: la interpolación admite como argumento la tesis pendiente de prueba.

Luego la esfera no es mayor que el cuádruple del cono dicho.

Sea, si es posible, menor que el cuádruple, de manera que la esfera sea menor que el cono Ξ.

Tómense las rectas K, H de manera que K sea mayor que H y guarde con ella una razón menor que la que guarda el cono Ξ con la esfera [Prop. 2] y pónganse las rectas Θ, I como antes y considérense en el círculo ΑΒΓΔ un polígono inscrito y otro circunscrito, de manera que el lado del circunscrito guarde con el lado del inscrito una razón menor que la que guarda K con I [Prop. 3], y esté lo demás dispuesto del mismo modo que en las proposiciones anteriores.

Entonces también la figura sólida circunscrita guardará con la inscrita una razón que sea el cubo de la que guarda el lado del polígono circunscrito al círculo ΑΒΓΔ con el del inscrito [Prop. 32]. Y el lado guarda con el lado una razón menor que la que guarda K con I [por hipót.]. Por tanto, la figura circunscrita guardará con la inscrita una razón menor que el cubo de la que guarda K con I. Y K guarda con H una razón mayor que el cubo de la que guarda K con I.[135] De modo que la figura circunscrita guarda con la inscrita una razón menor que la de K con H. Y K guarda con H una razón menor que el cono Ξ con la esfera [por hipót.]. Lo cual es imposible, pues la figura inscrita es menor que la esfera [Prop. 28] y la circunscrita mayor que el cono Ξ [Prop. 31, corol.].

Luego la esfera tampoco es menor que el cuádruple del cono que tiene la base igual al círculo ΑΒΓΔ y la altura igual al radio de la esfera. Y se había demostrado que tampoco era mayor. Luego es el cuádruple.

COROLARIO

Una vez demostrado lo anterior, es evidente que todo cilindro que tenga por base el círculo máximo de los de la esfera y la altura igual al diámetro de la esfera es una vez y media la esfera, y su superficie, incluidas las bases, es una vez y media la superficie de la esfera.

El cilindro antes indicado es el séxtuple del cono que tiene la misma base y la altura igual al radio, y se ha demostrado que la esfera es el cuádruple de ese mismo cono [Prop. 34]. Es evidente, por tanto, que el cilindro es una vez y media la esfera.

Y a la vez, puesto que se ha demostrado que la superficie del cilindro sin las bases es igual a un círculo cuyo radio es media proporcional entre la generatriz del cilindro y el diámetro de la base [Prop. 13], y que la generatriz del mencionado cilindro circunscrito a la esfera es igual al diámetro de la base,[136] y que el círculo que tiene el radio igual al diámetro de la base es el cuádruple de la base [*Elem.* XII 2] —es decir, del círculo máximo de los de la esfera—, entonces la superficie del cilindro excluidas las bases será el cuádruple del círculo máximo. Entonces la superficie entera del cilindro incluidas las bases será el séxtuple del círculo máximo. Y también la superficie de la esfera es el cuádruple del círculo máximo. Luego toda la superficie del cilindro es una vez y media la superficie de la esfera.

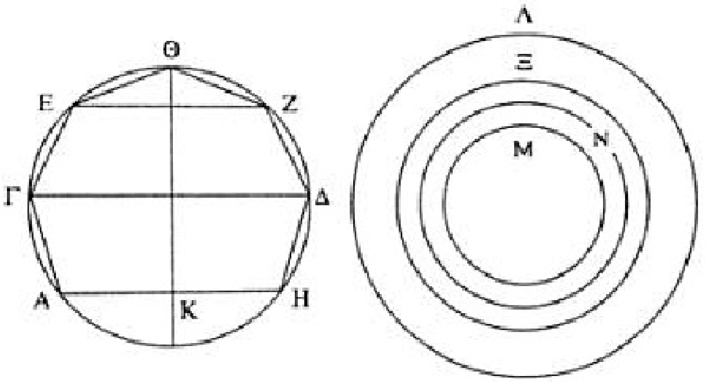
135. Véase más atrás, n. 133.

136. [*Es evidente que la media proporcional de ambos es igual al diámetro de la base*].

PROPOSICIÓN 35

La superficie de la figura inscrita en un casquete de la esfera es igual a un círculo el cuadrado de cuyo radio equivale al rectángulo comprendido por un lado del polígono inscrito en el segmento del círculo máximo y la recta igual a la suma de todas las paralelas a la base del segmento más la mitad de la base del segmento.

Sea una esfera y en ella un casquete cuya base sea el círculo del diámetro AH,[137] y sea AHΘ un círculo máximo y AΓEΘZΔH un polígono con un número par de lados[138] excepto el lado AH, y tómese el círculo Λ, el cuadrado de cuyo radio equivale al rectángulo comprendido por el lado AΓ y por la suma de EZ, ΓΔ más la mitad de la base, es decir, de AK.



Se ha de demostrar que el círculo es igual a la superficie de la figura.

Tómese el círculo M, el cuadrado de cuyo radio equivale al rectángulo comprendido por el lado EΘ y la mitad de EZ. El círculo M es igual a la superficie del cono cuya base es el círculo de diámetro EZ y su vértice el punto Θ [Prop. 14]. Tómese también otro círculo N, el cuadrado de cuyo radio equivalga al rectángulo comprendido por EΓ y la mitad de la suma de EZ, ΓΔ. Entonces, éste será igual a la superficie del tronco de cono comprendido entre los planos paralelos correspondientes a EZ, ΓΔ [Prop. 16]. E, igualmente, tómese otro círculo Ξ el cuadrado de cuyo radio equivale al rectángulo comprendido por AΓ y la mitad de la suma de ΓΔ, AH. Y éste también es igual a la superficie troncocónica comprendida entre los planos paralelos correspondientes a AH, ΓΔ [Prop. 16].

Entonces, la suma de todos los círculos será igual a la superficie entera de la figura, y la suma de los cuadrados de sus radios equivaldrá al rectángulo comprendido por un lado, AΓ, y una recta igual a la suma de EZ, ΓΔ más la mitad de la base AK. Y el cuadrado del radio del círculo Λ equivalía a esa misma área [por hipót.].

Luego el círculo Λ será igual a la suma de los círculos M, N, Ξ, de manera que también a la superficie de la figura inscrita.

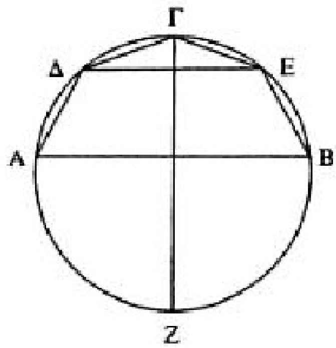
137. [*Inscríbase en él una figura, como se ha dicho, comprendida por superficies cónicas*].

138. Se ha de sobreentender «y equilátero».

PROPOSICIÓN 36[139]

Córtese la esfera mediante un plano que no pase por el centro y sea en ella AEZ un círculo máximo que corta perpendicularmente al plano secante, e inscríbase en el segmento ABΓ un polígono equilátero y de número par de ángulos[140] excepto la base AB.

De modo semejante a las proposiciones anteriores [Prop. 23], si, permaneciendo fija ΓZ, se hace girar la figura, los ángulos Δ, E, A, B se trasladarán según círculos cuyos diámetros serán ΔE, AB; y los lados del segmento se trasladarán según una superficie cónica;[141] y la figura resultante será un sólido comprendido por superficies cónicas que tendrá por base un círculo cuyo diámetro es AB y su vértice Γ.



Al igual que en las proposiciones anteriores, tendrá la superficie menor que la superficie del casquete que lo contiene. Pues ambos —el casquete y la figura— tienen el mismo límite en el plano —la circunferencia del círculo cuyo diámetro es AB— y ambas superficies son cóncavas hacia el mismo lado y la una está comprendida por la otra [Postul. 4].

PROPOSICIÓN 37

La superficie de la figura inscrita en el casquete de la esfera es menor que el círculo cuyo radio es igual a la recta trazada desde el vértice del casquete hasta la circunferencia del círculo que es la base del casquete.

Sea una esfera y en ella el círculo máximo ABEZ, y sea un casquete en la esfera cuya base sea el círculo de diámetro AB[142] y lo demás, igual, siendo ΘΛ el diámetro de la esfera, y trazadas las cuerdas ΛE, ΘA; y sea M un círculo cuyo radio sea igual a AΘ.

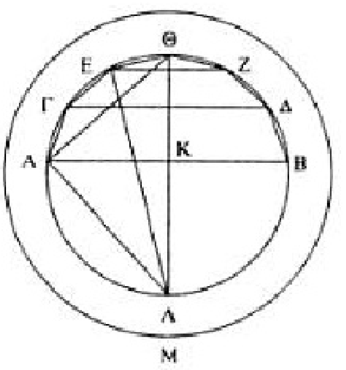
Se ha de demostrar que el círculo M es mayor que la superficie de la figura.

139. La evidente forma anómala de la proposición —carente de enunciado, con varias faltas de expresión, trastocada de lugar (su sitio adecuado sería intercambiar la posición con la Prop. 35)— y los resultados, bien pobres para los que suele alcanzar Arquímedes, han hecho pensar en una actuación especialmente incorrecta del transcriptor e, incluso, en la posibilidad de que toda ella haya de ser secluida.

140. De acuerdo con la expresión que sigue, «excepto la base», aquí esperaríamos un «de número par de lados».

141. Evidentemente, como ya hizo notar Heiberg, se trasladarán según «superficies cónicas», no según una sola.

142. [*E inscríbase en él la figura dicha y un polígono en el segmento de círculo*].



Se ha demostrado que la superficie de la figura es igual a un círculo el cuadrado de cuyo radio equivale al rectángulo comprendido por EΘ y la suma de EZ, ΓΔ, KA [Prop. 35]. Por otro lado, se ha demostrado que el rectángulo comprendido por EΘ y la suma de EZ, ΓΔ, KA es igual al rectángulo comprendido por EΛ, KΘ [Prop. 22, *Elem.* VI 16]. Y el rectángulo comprendido por EΛ, KΘ es menor que el cuadrado de lado AΘ.[143]

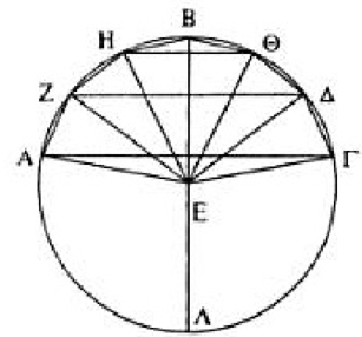
Por tanto, está claro que el radio del círculo que es igual a la superficie de la figura es menor que el radio de M.

Luego es evidente que el círculo M es mayor que la superficie de la figura [*Elem.* XII 2].

PROPOSICIÓN 38

La figura inscrita en el casquete comprendida por superficies cónicas más el cono que tiene por base la misma que la figura y por vértice el centro de la esfera es igual al cono que tiene su base igual a la superficie de la figura y la altura igual a la perpendicular trazada desde el centro de la esfera hasta un lado de los del polígono.

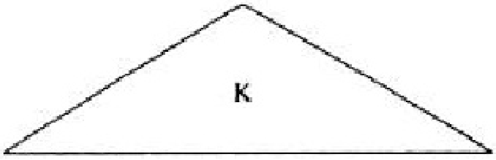
Sea una esfera y en ella un círculo máximo y un segmento ABΓ menor que un semicírculo y sea E el centro, e inscríbase en el segmento ABΓ un polígono de número par de lados[144] excepto AΓ, igual que en las proposiciones anteriores y, permaneciendo fija BΛ, produzca la esfera, al desplazarse alrededor, una figura comprendida por superficies cónicas, y a partir del círculo de diámetro AΓ constrúyase un cono que tenga por vértice el centro; y tómese el cono K que tenga la base igual a la superficie de la figura y la altura igual a la perpendicular trazada desde el centro E hasta un lado del polígono.



143. [*Pues es menor que el rectángulo comprendido por AΘ, KΘ*].

144. La mayor parte de los editores suplen: «y equilátero».

Se ha de demostrar que el cono K es igual a la figura comprendida[145] junto con el cono ΑΕΓ.



Constrúyanse también conos sobre los círculos de diámetros ΘΗ, ΔΖ que tengan por vértice el punto E. Entonces, el rombo sólido ΗΒΘΕ es igual a un cono cuya base es igual a la superficie del cono ΗΒΘ, y la altura igual a la perpendicular trazada desde E hasta HB [Prop. 18], y la figura circundante,[146] comprendida por la superficie que queda entre los planos paralelos correspondientes a ΗΘ, ΖΔ y las superficies cónicas ΖΕΔ, ΗΕΘ, es igual al cono cuya base es igual a la superficie que queda entre los planos paralelos correspondientes a ΗΘ, ΖΔ y la altura igual a la perpendicular trazada desde E hasta ZH [Prop. 20]. A la vez, la figura circundante comprendida por la superficie que queda entre los planos paralelos correspondientes a ΖΔ, ΑΓ y las superficies cónicas ΑΕΓ, ΖΕΔ, es igual a un cono cuya base es igual a la superficie que queda entre los planos paralelos correspondientes a ΖΔ, ΑΓ y la altura igual a la perpendicular trazada desde E hasta ZA [Prop. 20]. Entonces, la suma de los conos mencionados será igual a la figura más el cono ΑΕΓ. Y tienen la altura igual a la perpendicular trazada desde E hasta un lado del polígono, y las bases iguales a la superficie de la figura ΑΖΗΒΘΔΓ; y el cono K tiene también la misma altura y la base igual a la superficie de la figura. Luego el cono es igual a la suma de los conos mencionados. Y se había demostrado que la suma de los conos mencionados era igual a la figura más el cono ΑΕΓ.

Luego también el cono K es igual a la figura más el cono ΑΕΓ.

COROLARIO

A partir de esto es evidente que el cono que tiene por base el círculo cuyo radio es igual a la recta trazada desde el vértice del casquete hasta la circunferencia del círculo que es base del casquete y la altura igual al radio de la esfera, es mayor que la figura inscrita más el cono.

Y[147] es que el cono recién mencionado es mayor que el cono que es igual a la suma de la figura más el cono que tiene por base la base del casquete y el vértice en el centro, es decir, el cono que tiene la base igual a la superficie de la figura y la altura igual a la perpendicular trazada desde el centro hasta un lado del polígono [Prop. 38]. Pues la base es mayor que la base[148] y la altura mayor que la altura [Prop. 37].

145. Entiéndase: «comprendida por las superficies cónicas».

146. Gr. *períleimma: cf.* n. 87 a la Prop. 19.

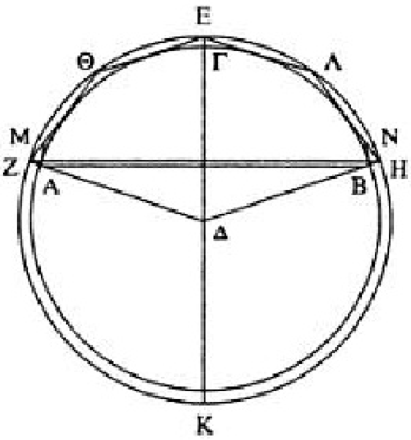
147. Para Heiberg, el texto que sigue hasta el fin del corolario debería quizá ser secluido: en efecto, si el corolario es una deducción evidente de lo anterior y no requiere demostración, lo que sigue es superfluo.

148. [*Eso ya se ha demostrado*].

PROPOSICIÓN 39

Sea una esfera y en ella el círculo máximo ΑΒΓ, y córtese[149] menor que un semicírculo, el que corta ΑΒ, y sea Δ su centro;[150] y desde el centro Δ trácense las rectas ΑΔ, ΔΒ hasta Α, Β, y circunscríbase al sector resultante un polígono,[151] y en torno a él un círculo. Tendrá el mismo centro que el círculo ΑΒΓ. Si, permaneciendo fija ΕΚ, el polígono, tras girar en torno a ella, vuelve a la misma posición, el círculo circunscrito se desplazará según la superficie de una esfera y los ángulos del polígono describirán círculos cuyos diámetros, que son paralelos a ΑΒ, unen los ángulos del polígono, mientras que los puntos en los que los lados del polígono son tangentes al círculo menor describen círculos en la esfera menor cuyos diámetros serán las rectas, paralelas a ΑΒ, que unen los puntos de tangencia, y los lados se desplazarán según superficies cónicas, y la figura circunscrita cuya base es el círculo de diámetro ΖΗ estará comprendida por superficies cónicas.

La superficie de dicha figura es mayor que la superficie del casquete menor cuya base es el círculo de diámetro ΑΒ.



Trácense las tangentes ΑΜ, ΒΝ. Se desplazarán según una superficie cónica, y la figura generada por el polígono ΑΜΘΕΛΝΒ tendrá la superficie mayor que la del casquete de la esfera cuya base es el círculo de diámetro ΑΒ[152] [Post. 4]. Pero la superficie cónica generada por ΖΜ, ΗΝ es mayor que la generada por ΜΑ, ΝΒ. Pues ΖΜ es mayor que ΜΑ,[153] y ΝΗ es mayor que ΝΒ [*Elem.* III 18 y I 19]; y cuando esto se da, una superficie es mayor que la otra superficie.[154]

Y es evidente, por tanto, que la superficie de la figura circunscrita es mayor que la superficie del casquete de la esfera menor.

149. Sobreentiéndase «un casquete».

150. «Centro de la esfera», se entiende.

151. Probablemente, la redacción original del texto de Arquímedes no omitía indicar que el polígono ha de ser equilátero y de número par de lados, excepto el correspondiente a la base del sector.

152. [*Tienen el mismo límite en un solo plano —el círculo de diámetro ΑΒ— y el casquete está contenido por la figura*].

153. [*Pues subtiende un ángulo recto*].

154. [*Pues esto se ha demostrado en los lemas*].

"Dios creó los números.
El hombre todo lo demás."

Leopold Kronecker, matemático del siglo XIX

∞

En la línea de *A hombros de gigantes*, dedicada a las grandes obras de la Física y la Astronomía, el gran científico Stephen Hawking nos presenta en este libro los 31 logros fundamentales del pensamiento matemático, desde la geometría básica hasta la teoría de los números transfinitos. El profesor Hawking ha analizado dos mil quinientos años de historia de las matemáticas para ofrecernos:

Una biografía de los diecisiete mayores genios matemáticos.

Una introducción al significado de sus investigaciones.

La solución a los distintos problemas que se plantearon.

967763

9 788484 327530